明清河　主编

常微分方程思想与方法

◎ 孙肖丽　杨艳萍　著

山东大学出版社

的方法、常数变易的方法、积分因子的方法、待定系数与系数函数的方法、特征方程与特征根法、升阶和降阶的方法。该部分有对方法本身的分析和举例，旨在训练学生根据题目特点选取不同的解题方法。

目　录

第一章　常微分方程中体现的数学思想

在本章中我们主要讨论常微分方程中体现的数学思想与方法.微分方程本身即是一种重要的数学思想,初等数学中,方程研究离散变量之间的关系,常微分方程则讨论连续变量的性质.在该章中,常数变易的思想、级数的思想、定性分析的思想是常微分方程学科所特有的,是本学科学习对象的特点所决定的.构造的思想、不动点的思想是分析类学科如数学分析、常微分方程、泛函分析等所具有的,在掌握这类思想方法时,应注意两点:一是学科知识的综合运用,这是因为我们往往需要借助相关学科的知识或方法来解决常微分方程中遇到的问题;二是此类思想方法在不同学科中有着不同的体现,如构造的思想方法在数学分析中着重在于构造函数,而在常微分方程中则可以是构造函数,也可以是构造函数列,还可以是构造方程、构造解、构造参数.

§1.1　常数变易的思想

常数变易法是常微分方程学科所特有的一种方法,是连接非齐次线性微分方程与相应齐次线性微分方程的桥梁.

在微分方程发展最初期,不仅人们所认识的方程类型非常有限,所用到的解决方法也非常简单,初等积分的方法即为其中之

一，这种方法需要将不同形式的方程转化为可以积分的形式. 对于一阶齐次线性微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y$，可以用变量分离的方法得解$y=c\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$；对于一阶非齐次线性微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y+Q(x)$，注意到其解$y=y(x)$是$x$的函数表达式，所以方程右端可以写为$y\left(P(x)+\frac{Q(x)}{y(x)}\right)$（尽管此时$y(x)$表达式未知），这时即可分离变量，将方程写为$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\left(P(x)+\frac{Q(x)}{y(x)}\right)\mathrm{d}x$，从而形式上可积分，得$y=\pm\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{Q(x)}{y(x)}\mathrm{d}x}$，因为其中的$y(x)$未知，所以$\mathrm{e}^{\int\frac{Q(x)}{y(x)}\mathrm{d}x}$未知，可记其为$c(x)$，即该方程的形式解为$y=c(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$，将该形式解代入原方程解之可得$c(x)$表达式，再代入形式解可得通解. 对比非齐次线性微分方程与相应齐次线性微分方程，两者通解在形式上的差别在于后者中的常数c在前者中变易为函数$c(x)$，这也正是常数变易法的思路.

常数变易法是常微分方程所特有的一个方法，较之于代数方程，微分方程之所以可以用常数变易法，是由于微分方程是以函数为未知量的方程，所以只要确定了方程解的结构，即可将结构解（即形式解）代入微分方程得解.

常数变易法同时又是直观的，对于齐次线性微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y$，其通解为$y=c\mathrm{e}^{P(x)\mathrm{d}x}$，若令其中的常数$c$变易为函数$c(x)$，则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$可在原来形式$(P(x)y)$基础上多出一项，我们只需寻找适当的$c(x)$，使多出的一项恰为方程的非齐次项$Q(x)$即可.

常数变易法在一阶微分方程中的应用非常简单，即只需如上分析将相应齐次线性方程通解中的常数c变易为函数$c(x)$，而在高阶微分方程中的应用则要复杂得多. 考虑$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots$

$+a_n(t)x=f(t)$，若对其进行直接的常数变易，即将其相应齐次线性微分方程$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=0$的通解$\sum_{i=1}^{n}c_ix_i(t)$中的$c_i$变为$c_i(t)$，$i=1,2,\cdots,n$，代入原方程后产生的第一个问题是一个等式中出现$n$个未知函数，即为不定方程，第二个问题是等式中出现了$c_i(t)$的0阶至n阶导函数，即形式上较原方程更为复杂. 为解决第一问题，我们可以在原方程基础上附加$n-1$个条件使之定解. 具体如何加条件，可考虑第二个问题，我们可以做如下分析：常数变易后，$x'(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i'(t)x_i(t)+\sum_{i=1}^{n}c_i(t)x_i'(t)$，为避免$x''(t)$中出现$c_i''(t)$，可令第一个附加条件为$\sum_{i=1}^{n}c_i'(t)x_i(t)=0$，此时，$x(t)=\sum_{i=1}^{n}c'_i(t)x'_i(t)+\sum_{i=1}^{n}c_i(t)x''_i(t)$，为避免$x'''(t)$中出现$c_i''(t)$，可令附加的第二个条件为$\sum_{i=1}^{n}c'(t)x_i'(t)=0$，依次继续，得第$n-1$个附加条件为$\sum_{i=1}^{n}c'_i(t)x_i^{(n-2)}(t)=0$. 代入原方程，得$\sum_{i=1}^{n}c_i'(t)x_i^{(n-1)}(t)=f(t)$. 考虑这$n$个等式所组成的方程组：

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}c_i'(t)x_i(t)=0,\\ \sum_{i=1}^{n}c_i'(t)x_i'(t)=0,\\ \cdots\\ \sum_{i=1}^{n}c_i'(t)x_i^{(n-2)}(t)=0,\\ \sum_{i=1}^{n}c_i'(t)x_i^{(n-1)}(t)=f(t);\end{cases}$$

该方程组系数行列式为 $W[x_1(t),\cdots,x_n(t)]\neq 0$，所以必存在唯一的 $c_1'(t),\cdots,c_n'(t)$，积分可得 $c_1(t),\cdots,c_n(t)$，代入形式解可得原方程的通解.

例 1-1 求解方程 $x'(t)-x(t)=\mathrm{e}^t$.

解 先求解相应齐次线性微分方程 $x'(t)-x(t)=0$，得其解为

$$x(t)=C\mathrm{e}^t.$$

令原方程通解形如 $x(t)=C(t)\mathrm{e}^t$，代入原方程，得 $C'(t)=1$，即

$$C(t)=t+C.$$

从而原方程通解为

$$x(t)=t\mathrm{e}^t+C\mathrm{e}^t\ (C\in R).$$

例 1-2 用常数变易法求解方程 $x''-x=\cos t$.

解 易求相应奇次线性微分方程通解为 $x(t)=c_1\mathrm{e}^t+c_2\mathrm{e}^{-t}$. 令原方程通解形如 $x(t)=c_1(t)\mathrm{e}^t+c_2(t)\mathrm{e}^{-t}$，如上分析附加条件并代入方程，得

$$\begin{cases}c_1'(t)\mathrm{e}^t+c_2'(t)\mathrm{e}^{-t}=0,\\ c_1'(t)\mathrm{e}^t-c_2'(t)\mathrm{e}^{-t}=\cos t,\end{cases}$$

解之，得

$$\begin{cases}c_1'(t)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\cos t,\\ c_2'(t)=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{t}\cos t,\end{cases}$$

积分，得

$$\begin{cases}c_1(t)=-\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}(\cos t-\sin t)+k_1,\\ c_2(t)=-\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{t}(\cos t+\sin t)+k_2.\end{cases}$$

k_1,k_2 为任意常数. 所以原方程通解为

$$x(t)=k_1\mathrm{e}^t+k_2\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{2}\cos t\ (k_1,k_2\text{ 为任意常数}).$$

在求解非齐次线性方程组时也经常用到常数变易法，常用的有两种形式：第一种是化为纯量的常数变易，即对于 $X'=A(t)X+F(t)$，先考虑相应齐次线性方程组 $X'=A(t)X$，记其通解为 $X(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}c_iX_i(t)$（$n$ 为 X 的维数），可令原方程通解为 $X(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i(t)X_i(t)$，代入原方程，得关于 $c_i'(t)$ 的方程组 $\sum\limits_{i=1}^{n}c_i'(t)X_i(t)=F(t)$. 由于 $X_1(t),\cdots,X_n(t)$ 线性无关，故 $c_i'(t)$ 可求且唯一，进一步积分得 $c_i(t)$，代入形式解得通解. 第二种是直接作为向量的常数变易，记 $X'=A(t)X$ 的基解矩阵为 $\Phi(t)$，寻求 $X'=A(t)X+F(t)$ 形如 $\varphi(t)=\Phi(t)C(t)$ 的解（其中 $C(t)$ 为待定的向量函数），代入原方程组，得 $\Phi(t)C'(t)=F(t)$，从而 $C(t)=\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)F(s)\mathrm{d}s$，$t_0,t\in[a,b]$，所以向量函数 $\varphi(t)=\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)F(s)\mathrm{d}s$ 是原方程满足初始条件 $\varphi(t_0)=0$ 的解.

例 1-3 用常数变易法求解方程组 $\begin{cases}X'=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t}\\0\end{bmatrix},\\ X(0)=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}.\end{cases}$

解 先考虑相应齐次线性方程组

$$X'=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}X,$$

易求其特征根为 $\lambda=1$（二重）.

用待定系数法求其两个线性无关解

$$X_1(t)=\begin{bmatrix}t\mathrm{e}^t\\\mathrm{e}^t\end{bmatrix},X_2(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^t\\0\end{bmatrix}.$$

所以相应齐次线性方程组通解为

$$X(t)=\begin{pmatrix}c_1te^t+c_2e^t\\c_1e^t\end{pmatrix}.$$

下求解给定方程组：

方法一　用纯量的常数变易法

寻求原方程形如 $X(t)=\begin{pmatrix}c_1(t)te^t+c_2(t)e^t\\c_1(t)e^t\end{pmatrix}$ 的通解.

代入原方程，得

$$\begin{pmatrix}c_1'(t)te^t+c_2'(t)e^t\\c_1'(t)e^t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{-t}\\0\end{pmatrix},$$

解之，得

$$c_1'(t)=0,c_2'(t)=e^{-2t},$$

积分，得

$$c_1(t)=k_1,c_2(t)=-\frac{1}{2}e^{-2t}+k_2.$$

原方程组通解为

$$X(t)=\begin{pmatrix}k_1te^t+k_2e^t-\frac{1}{2}e^{-t}\\k_1e^t\end{pmatrix},$$

代入初始条件，得解

$$X(t)=\begin{pmatrix}te^t-\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{-t}\\e^t\end{pmatrix}.$$

方法二　用向量的常数变易法

相应齐次线性方程组的基解矩阵为

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}e^t&te^t\\0&e^t\end{pmatrix},$$

可求

$$\Phi^{-1}(s)=\begin{pmatrix}e^{-s}&-se^{-s}\\0&e^{-s}\end{pmatrix},$$

所以满足初始条件 $X(0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 的解为

$$X_0(t)=\begin{pmatrix}e^t&te^t\\0&e^t\end{pmatrix}\int_0^t\begin{pmatrix}e^{-s}&-se^{-s}\\0&e^{-s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-s}\\0\end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})\\0\end{pmatrix},$$

又 $\Phi(0)=E$，所以相应齐次线性方程组满足初始条件

$$\varphi(0)=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

的解为

$$\varphi(t)=\Phi(t)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(t-1)e^t\\e^t\end{pmatrix},$$

从而原初值问题的解为

$$X(t)=X_0(t)+\varphi(t)=\begin{pmatrix}te^t-\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})\\e^t\end{pmatrix}.$$

常数变易法作为常微分方程中一个特别而重要的方法，究其实质，是一种转化的方法，即将求解未知函数 $x(t)$ 或向量函数 $X(t)(x_i(t)(i=1,2,\cdots,n))$ 的问题转化为求解未知函数 $c(t)$ 或向量函数 $C(t)$(也可记为 $c_i(t)(i=1,\cdots,n)$). 应用该方法的关键在于确定原方程(组)的形式解.

§1.2　近似的思想

常微分方程是大学数学中与生活实践联系最为直接和密切的学科之一，而现实生活往往是复杂多样的，要将其归结为以精确性为其主要特征的数学分科，近似思想起到了非常重要的作用.

首先，要构造的方程是近似的，即用来描述物理过程的微分方程以及由试验测定的初始条件往往是近似的. 其中微分方程中的

近似主要体现在两个方面：一是系统中变量的个数是近似的，换言之，为了保证模型的简单化，我们往往略掉一些次要因素而只保留主要的影响因素. 例如在研究摆的振动规律时，因为事实上没有绝对的刚体，所以严格来讲也应该考虑到链子的变形，但在实际构造数学模型时，该变量往往略去不计. 二是方程本身的近似，即事实上每个影响因素的影响方面可能是多样的，但在模型化的过程中，往往略去次要方面的影响使模型简单化和理想化. 例如在发声器方程 $\rho l\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\dfrac{kps}{v}x$ 的推导过程中，我们略去了容器颈部空气的压缩性而只考虑其运动性，同时略去容器中空气的运动性而只考虑其压缩性. 由此可以看到，在由实际问题进行数学建模（即得方程）的过程中，我们的主要任务是如何找到尽可能简单的同时又可以很好的描述其中变量关系的微分方程，而那些使得问题繁杂不堪且事实上影响又很小的因素可以忽略不计.

近似思想在微分方程中的第二个体现是有关解的定量计算. 在微分方程发展初期，人们致力于精确解的寻找，即寻求方程初等函数或初等函数积分形式的解，但可以如此求解的方程是非常有限的. 1841 年，刘维尔证明了即使是形式上很简单的李卡蒂方程 $\dfrac{dy}{dx}+ay^2=x^2(a>0)$，其解也无法用初等函数或其积分表示，在这种情况下，可以应用于一般方程的求近似解的方法就具有了非常重要的意义，而且从理论上来讲，近似解在一定条件下可以达到任意要求的精确度，这样就从一定程度上满足了实际的需要.

求近似解的方法一般有两种，即用逐步逼近列求近似解析解的方法和数值计算求近似数值解的方法. 前者在理论证明中有着重要的作用，而后者有更广泛的应用性. 以一般的一阶微分方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y),\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

为例（一阶微分方程组有类似的结论，而高阶微分方程可以化为一阶微分方程组处理），当其满足解的存在唯一性定理条件时，可以构造函数列

$$\varphi_0(x)=y_0,$$

$$\varphi_{n+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,\varphi_n(x))dx,n=0,1,2,\cdots$$

$\{\varphi_n(x)\}$ 的极限函数 $\varphi(x)$ 即为原初值问题的精确解，但该解往往不能用初等函数或其积分表出，这时我们可以以 $\varphi_n(x)$ 近似逼近 $\varphi(x)$. 该方法的优越性在于可以通过增加迭代次数 n 来提高精度，且近似解与精确解之间的误差有定量估计式

$$|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\leqslant\frac{ML^nh^{n+1}}{(n+1)!},$$

其中 $M=\sup\limits_{[x_0-a,x_0+a]\times[y_0-b,y_0+b]}f(x,y)$，$L$ 为李普希兹常数，$h=\min\{a,\dfrac{b}{M}\}$. 对于一阶微分方程组，我们有类似的结论（可见例 1-2）.

数值计算基本步骤是：对求解区间进行剖分，然后把微分方程离散成在结点上的近似公式或近似方程，最后结合定解条件求出近似解. 具体的的方法有欧拉方法、改进的欧拉方法、龙格一库塔方法等. 数值计算的优越性之一在于其直观性，以欧拉方法为例：对于

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y),\\ y(x_0)=y_0,\end{cases}$$

从初始点 (x_0,y_0) 出发，按照一定的步长 h，以 $y_0+f(x_0,y_0)h$ 近似表示 $y_1=f(x_1)=f(x_0+h)$ 的函数值，进一步，以 $y_1+f(x_1,y_1)h$ 近似表示 $y_2=f(x_2)=f(x_1+h)=f(x_0+2h)$ 的函数值 … 依次继续，可得方程在任一点 (x,y) 处的数值解. 而改进的欧拉方法则是在积分形式基础上做近似代换，实现了精度的提高. 数值解法的优

越性之二在于随着计算机技术的发展，可以通过数值计算及相应的图形软件使我们更清楚地认识微分方程的解随自变量及参数变化时的性态. 该方法优越性之三在于解的精确度控制：一方面我们可以选取不同的计算方法，如欧拉方法为1阶精度，即局部截断误差为$O(h^2)$，改进的欧拉方法为2阶精度，龙格—库塔方法则可以达到更高的精度；另一方面，在计算机处理时，可以在选定计算方法的基础上通过自动变步长的方法来保证一定的精度要求. 当然我们也应该看到，数值计算用于求微分方程的近似解也有其不可逾越的缺点，即只能给出在某个固定点处的函数值，而不能给出确切的表达式.

例 1-4 求初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx} = x^2 - y^2 \\ y(-1) = 0\end{cases}(R: |x+1| \leqslant 1, |y| \leqslant 1)$$

的解的存在区间，并求第二次近似解，给出解在存在区间上的误差估计.

解 $a = 1, b = 1, M = 4, L = 2$，所以 $h = \min\{a, \dfrac{b}{M}\} = \dfrac{1}{4}$，

从而解的存在区间为$\left[-\dfrac{5}{4}, -\dfrac{3}{4}\right]$.

构造

$$\varphi_0(x) = y_0 = 0,$$

$$\varphi_1(x) = \int_{-1}^{x} x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3},$$

$$\varphi_2(x) = \int_{-1}^{x}\left[x^2 - \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}\right)^2\right]dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{63}x^7 - \frac{1}{18}x^4 - \frac{1}{9}x + \frac{11}{42}.$$

误差估计式为

$$|\varphi_2(x) - \varphi(x)| \leqslant \frac{ML^n h^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{24}.$$

例 1-5 试用逐次逼近法求初值问题$\begin{cases}\dfrac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}X \\ X(0) = \begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}\end{cases}$的第三次近似解.

解 由逐次逼近列的构造方法，可令

$$X_0(t) = \begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix},$$

$$X_1(t) = X_0 + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix} X_0(s)ds = \begin{pmatrix} t \\ 1\end{pmatrix},$$

$$X_2(t) = X_0 + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix} X_1(s)ds = \begin{pmatrix} t \\ 1 - \dfrac{t^2}{2}\end{pmatrix},$$

$$X_3(t) = X_0 + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix} X_2(s)ds = \begin{pmatrix} t - \dfrac{t^3}{6} \\ 1 - \dfrac{t^2}{2}\end{pmatrix},$$

其中 $X_3(t)$ 即为所求近似解.

例 1-6 用欧拉公式和梯形公式的预报—校正法计算

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y}(0 \leqslant x \leqslant 1) \\ y_0 = 1\end{cases}$$

的数值解，取 $h = 0.1$，梯形公式只迭代一次，并与精确值相比较. 方程的解析解为 $y = \sqrt{1+2x}$.

解 欧拉公式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + 0.1 \times \left(y_n - \dfrac{2x_n}{y_n}\right) = 1.1y_n - \dfrac{0.2x}{y_n}, \\ y_0 = 1,\end{cases}$$

梯形公式只校正一次的格式为

$$
\begin{cases}
y_{n+1}^{(0)} = 1.1y_n - \dfrac{0.2x_n}{y_n}, \\
y_{n+1} = y_n + 0.05 \times \left(y_n - \dfrac{2x_n}{y_n} + y_{n+1}^{(0)} - \dfrac{2x_{n+1}}{y_{n+1}^{(0)}} \right), \\
y_0 = 1, x_0 = 0,
\end{cases}
$$

结果列入下表：

x_n	欧拉方法	梯形法	精确值
0.1	1.100 000	1.095 909	1.095 445
0.2	1.191 818	1.184 097	1.183 216
0.3	1.277 438	1.266 201	1.246 911
0.4	1.358 213	1.343 360	1.341 641
0.5	1.435 133	1.416 402	1.414 214
0.6	1.508 966	1.485 956	1.483 240
0.7	1.580 338	1.552 515	1.549 193
0.8	1.649 783	1.616 475	1.612 452
0.9	1.717 779	1.678 167	1.673 320
1.0	1.784 771	1.737 868	1.732 051

近似思想在常微分方程中的第三个体现在于定性分析. 即用近似方法考虑微分方程解的定量信息后，在 19 世纪末 20 世纪初，人们将重点转移至定性理论的研究，才不必求解方程(无论是精确解还是近似解) 而直接由方程出发考虑方程解的性态. 在定性分析中，近似思想也起到了非常重要的作用，其中主要体现在稳定性分析方面，举个例子，我们可以通过原系统近似的线性系统的稳定性来判断原系统的稳定性. 具体来讲，对于 $X' = AX$(其中 A 为 $n \times n$ 常数阵)，若特征根均具有负实部，其零解渐近稳定；若存在具有正实部的特征根，零解不稳定；若无具有正实部的特征根但存

在零特征根或具有零实部的特征根，零解可能稳定可能不稳定. 一般的系统 $X' = F(t,X)$ 没有直接的稳定性结论，但若将右端项记为 $F(t,X) = AX + R(X)$，当其中 $R(X)$ 满足 $R(0) = 0$(保证 $X \equiv 0$ 仍为解) 且 $\lim\limits_{\|X\| \to 0} \dfrac{\| P(X) \|}{\| X \|} = 0$(保证 $R(X)$ 的影响作用远远小于线性部分的影响) 时，该系统稳定性可线性近似确定. 即当其线性近似系统 $X' = AX$ 特征根均具有负实部时，$X' = AX + R(X)$ 零解渐近稳定；当 $X' = AX$ 存在具有正实部的特征根时，$X' = AX + R(X)$ 零解不稳定.

例 1-7　考虑系统

$$
\begin{cases}
x' = y, \\
y' = -ax - by - cx^2
\end{cases}
$$

零解的稳定性. 其中 $a, b, c > 0$ 为常数.

解　线性近似系统为

$$
\begin{cases}
x' = y, \\
y' = -ax - by,
\end{cases}
$$

非线性项 $R(x,y) = x^2$，易证 $R(0,0) = 0$，且 $\lim\limits_{|x|+|y| \to 0} \dfrac{\| R(x,y) \|}{| x | + | y |} = 0$，所以原系统稳定性可由其线性近似系统稳定性确定. 又可求线性近似系统特征根为 $\lambda_{1,2} = -\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2}$，均有负实部，故零解渐近稳定.

在稳定性分析中，线性近似的方法可以将较复杂的情形与线性情形相联系，从而使问题变得简单. 但类似于定量求近似解时必会有一定程度的误差，近似方法用于定性分析也有其不可克服的局限性. 具体来讲，当线性近似方程组 $X' = AX$ 无正实部特征根但有零特征根或零实部的特征根时，原系统 $X' = AX + R(X)$ 的稳定性不再仅取决于其线性近似部分，还依赖于它的更高阶项. 这

是因为此时变动 $R(X)$，尽管仍可保证影响很小，但足以引起质的变化. 要更直观形象地理解这一点，可以联系连续函数保号性：若 $f(x)$ 在 x_0 连续，且 $f(x_0)>(<)0$，则当 x 在 x_0 充分小领域内任意变动时，$f(x)>(<)0$；但若 $f(x_0)=0$；则在对于在 x_0 无论多么小邻域内的 x，都有可能函数值为正，也可能函数值为负. 事实上，若一个平面动力系统的线性近似部分有一对纯虚数的特征根时，零解可能呈现渐近稳定、稳定和不稳定等不同性态.

例 1-8 考虑下列系统零解的稳定性.

(1) $\begin{cases} x' = y - x^3, \\ y' = -x - x^2 y, \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x' = y - x(x^2+y^2), \\ y' = -x - y(x^2+y^2), \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x' = y + x(x^2+y^2), \\ y' = -x + y(x^2+y^2). \end{cases}$

解 三个系统有共同的线性近似系统 $\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x, \end{cases}$ 但特征根为 $\lambda=\pm \mathrm{i}$，故不能用线性近似方法判断.

我们采用 V 函数方法.

取 $V(x,y)=x^2+y^2$ 正定，则：

$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}$ 常负，所以系统(1) 零解稳定；

$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(2)}$ 定负，所以系统(2) 零解渐近稳定；

$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3)}$ 定正，所以系统(3) 零解不稳定.

可以看到，无论是在现实模型化为微分方程的过程中，还是在微分方程的定量求解及定性分析方面，近似方法都起到了非常重要的作用. 但是，近似方法又有其难以克服的局限性，这就要求我们一方面提出更多更优的近似方法以期解决更多不易精确求解的

问题，另一方面，也要努力拓展近似方法应用的范围，使问题不致在近似化的过程中发生本质的变化.

§1.3 数形结合的思想

数形结合的思想充分利用了数的规范性和形的直观性，通过数和形的联系与转化来研究数学对象，解决数学问题，是一类常用的重要方法. 事实上，19 世纪以前的算数和几何概念大部分是建立在几何量的概念之上的，后来，笛卡儿指出，(n 元) 函数可对应于($n+1$ 维空间中的) 曲线，而微积分又告诉我们，导函数表示函数的变化率，在几何上即表为曲线的切线斜率. 我们知道，微分方程是指含有未知函数及其导函数的等式，所以微分方程解的存在性及解的很多性质往往可以从几何上得到体现. 从另一方面来讲，因为我们一般得不到方程的显式解，所以往往从向量场的特性出发，来获取轨线的几何特征或轨线族的拓扑结构图，因此，微分方程定性理论又被称为几何理论. 数形结合的思想在微分方程中往往体现在以下几个方面：

一、利用几何意义可以从向量的角度理解解的存在性及不存在性

导数可表示曲线在某点处的变化率，亦即曲线在该点处切线的斜率，所以我们可以由微分方程出发，在相空间中的每一点上相应地给出一个向量，所有向量构成一个向量场，而求解微分方程即求曲线，使在其上每一点处都与该方程定义的向量相切. 形象地讲，即在相空间中作折线段，使每条折线都沿其初始点处向量的方向，其长度与向量长度成正比. 现令每条折线的长度逐渐变短并增加折线段的数目，其极限即为一条光滑曲线，也就是我们要求的积分曲线.

向量观点也可以解释微分方程解的不存在性，即不存在符合条件的光滑曲线，使在其每一点上的切向量都属于微分方程所定义的向量场. 这是因为有的向量场中会有向量相互“矛盾”，因此不可能得到一条连续且光滑的曲线.

例 1-9 对任意的 $P_0(x_0,y_0)\in R^2$，证明初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x-y)\mathrm{e}^{xy^2},\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

的右行解都在 $[x_0,+\infty]$ 上存在.

证明 首先由解的存在唯一性定理及解的延展定理知，对任意 $G:G\subset R^2$，$P_0(x_0,y_0)\in G$，初值问题的解存在唯一，且可延伸到 G 的边界.

考虑微分方程相应的水平等斜线 $L:y=x$，易知线素斜率在 L 上方为负，在 L 下方为正，即积分曲线在 L 上方单减，在 L 下方单增.

若 $x_0<y_0$（即 P_0 位于 L 上方），考虑解在条形域 $\{(x,y)\mid x_0\leqslant x\leqslant y_0,-\infty<y<+\infty\}$ 内的延展性及积分曲线的单调性，可知过 P_0 的积分曲线必与 L 相交（见图 1-1）.

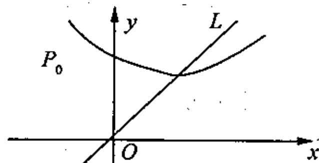


图 1-1

若 $x_0\geqslant y_0$，考虑解在条形域 $\{(x,y)\mid x_0\leqslant x\leqslant+\infty,-\infty<y<+\infty\}$ 内的延展性，此时因为 P_0 在 L 下方，而积分曲线单调递增，且在向右延伸时不可能从 L 下方穿越至 L 上方，故必向右延伸直至跨越区间 $x_0\leqslant x<+\infty$.

二、利用几何图形有助于加深理解某些定义

例 1-10 考虑二阶系统

$$\begin{cases}x_1'=f_1(t,x_1,x_2),\\ x_2'=f_2(t,x_1,x_2).\end{cases}$$

(i) 若对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(\varepsilon,t_0)>0$，使对任意 x_{10},x_{20},t：$|x_{10}-\overline{x}_{10}|\leqslant\delta$，$|x_{20}-\overline{x}_{20}|\leqslant\delta$，$t\leqslant t_0$，均有 $|x_1(t)-\overline{x}_1(t)|\leqslant\varepsilon$，$|x_2(t)-\overline{x}_2(t)|\leqslant\varepsilon$，其中 $x_1(t),x_2(t)$ 为系统满足 $x_1(t_0)=x_{10},x_2(t_0)=x_{20}$ 的解，则称解 $x_1=\overline{x}_1(t),x_2=\overline{x}_2(t)$ 为稳定的.

(ii) 若解 $x_1=\overline{x}_1(t),x_2=\overline{x}_2(t)$ 为稳定的，且存在 $\delta_0(t_0)>0$，使对任意 x_{10},x_{20},t：$|x_{10}-\overline{x}_{10}|\leqslant\delta_0$，$|x_{20}-\overline{x}_{20}|\leqslant\delta_0$，有 $\lim\limits_{t\to+\infty}[x_1(t)-\overline{x}_1(t)]=0$，$\lim\limits_{t\to+\infty}[x_2(t)-\overline{x}_2(t)]=0$，其中 $x_1(t)$，$x_2(t)$ 如(i)所定义，则称解 $x_1=\overline{x}_1(t),x_2=\overline{x}_2(t)$ 为渐近稳定的.

只从定义的文字描述来看，我们还是不太清楚稳定解与渐近稳定解的差别，但若以 $\overline{x}(t)=0$ 的特殊情形画出如图 1-2 所示的图形，则二者的差别就一目了然：渐近稳定不仅仅解不超出 $\overline{x}(t)$ 的 ε 邻域，而且还趋向于 $\overline{x}(t)$.

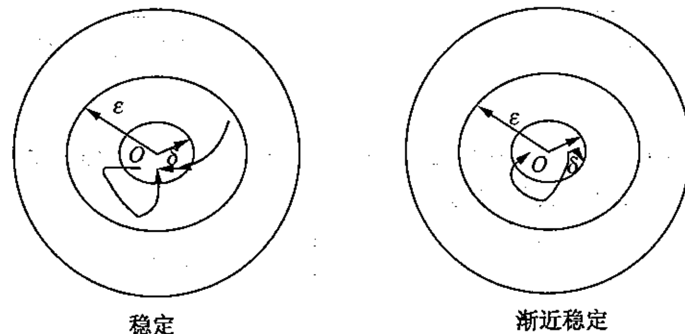


图 1-2

三、利用几何图形有助于理解某些定理

例 1-11 （李亚普诺夫稳定性定理）考虑自治系统

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2), \\ x_2' = f_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

若在某个 D_1 上存在正（负）定函数 $V(x_1, x_2)$，且它关于该系统对 t 的全导数在 D_1 上为常负（正）函数，则该系统零解稳定.

分析 当 $V(x_1, x_2)$ 为正定函数时，等值曲线 $V(x_1, x_2) = C$ 是一个套一个的闭曲线族，而 $V(t)$ 恰为当变化时沿轨线 V 对 t 的变化率. 由假设 $V(t) \leqslant 0$，所以当 t 增加时，沿轨线，V 单调不增，从而当初始值 $V(x_1(t_0), x_2(t_0))$ 充分小时，沿轨线，V 值也不会很大，轨线也就不会远离原点，从而零解是稳定的（见图 1-3）.

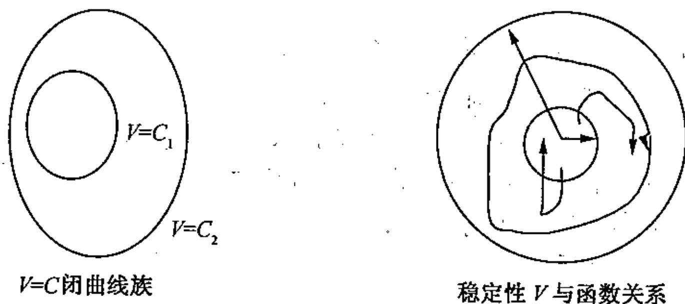


图 1-3

例 1-12 （第一比较定理）设 $y = \varphi(x)$ 与 $y = \Phi(x)$ 在 $x \in (a, b)$ 上分别是初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \text{与} \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解，其中 $f(x, y)$ 与 $F(x, y)$ 都在区域 G 内连续且满足不等式 $f(x, y) < F(x, y), (x, y) \in G$，则

$$\varphi(x) < \Phi(x), \quad x_0 < x < b;$$
$$\varphi(x) > \Phi(x), \quad a < x < x_0.$$

分析 在定理证明中须找到 $\beta = \min\{x \mid \Phi(x) - \varphi(x) = 0, x_0 < x < b\}$ 及 $\alpha = \max\{x \mid \Phi(x) - \varphi(x) = 0, a < x < x_0\}$，过程非常繁琐，但若考虑其几何意义则易于理解：在同一点 (x_0, y_0) 处，斜率小的曲线 $y = \varphi(x)$ 向右不可能从斜率大的曲线 $y = \Phi(x)$ 下方穿越到上方，即不可能有如图 1-4 所示的情形出现.

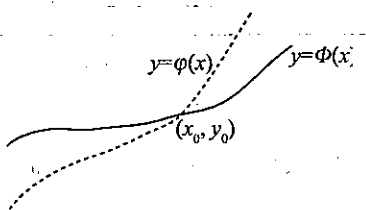


图 4

四、利用几何图形可以简化某些证明过程，或者更清晰地给出证明思路

例 1-13 （解的存在性定理）若 $f(t, x)$ 在区域 R：$|t - t_0| \leqslant a$，$|x - x_0| \leqslant b$ 上连续，则方程 $x' = f(t, x)$ 至少在区间 $[t_0 - h, t_0 + h]$ 上存在一个满足初始条件 $x(t_0) = x_0$ 的解，其中 $h = \min\{a, \dfrac{b}{M}\}$，$M = \sup\limits_{(t,x)\in R} f(t, x)$.

分析 考虑方程在 R 上确定的方向场，过初始点 (t_0, x_0) 向右作斜率为 $f(t_0, x_0)$ 的直线段，即沿方向场在 (t_0, x_0) 作线段；在该直线段上取内的另一点 (t_1, x_1)，沿方向场在 (t_1, x_1) 处作右行线段；再在该线段上取内第三点 (t_2, x_2)，沿方向场在 (t_2, x_2) 处作右行线段……继续下去，可得一条始于 (t_0, x_0) 的右行折线，如图 1-5 所示. 同样地，我们也可得左行折线. 一个直观的结论是：当相

邻两点 t_n, t_{n+1} 之间距离较小时，该折线可看作原方程的近似积分曲线；而当 t_n, t_{n+1} 之间距离趋于 0 时，该折线趋于我们所要求的积分曲线.

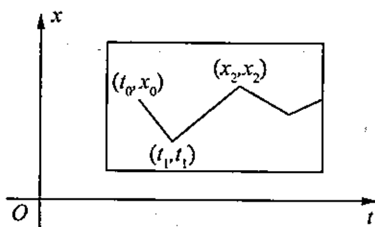


图 1-5

基于以上几何直观，我们可以确定求证的基本思路：(1) 对任意的 $\varepsilon > 0$，存在方程的 ε 近似解 $\varphi(t)$；(2) 设 $\varepsilon_m (m = 1,2,\cdots)$ 是任一趋于 0 的正项序列，可证相应的 $\varphi_m(t)$ 存在一致收敛的子列，并设收敛到 $\varphi(t)$；(3) 证 $\varphi(t)$ 即为我们要求的解.（具体证明过程可参见[3]）

由分析的过程，我们可以得到方程近似求解的方法，即：

$$\begin{cases} x_0 = x_0, \\ x_n = x_{n-1} + f(t_{n-1}, x_{n-1})(t_n - t_{n-1}), n = 1,2,\cdots \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} x_0 = x_n, \\ \dfrac{x_n - x_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} = F(x,y). \end{cases}$$

该方法称为 Euler 方法，又称差分法.

§1.4 极限的思想

广义的极限是指事物变化的终极状态，数学上的极限则是指变量与之无限趋近的量. 作为常微分方程学科，极限思想则体现在

已知微分方程所具有的性质，探究解的极限性态，或已知微分方程具有的性质，以极限为工具，探究解的性质，如解的存在性、有界性、稳定性等. 极限思想揭示了变量与常量、有限与无限的对立统一关系. 借助极限，我们可以以不变认识变，以有限认识无限，以直线认识曲线，以近似认识精确.

早在公元前 4 世纪，希腊数学家欧多克斯提出了逼近法和逼近原理，成为开创极限理论的先驱，公元 3 世纪，中国数学家刘徽用割圆术计算 π 的近似值，提出“…… 割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣”，从文字叙述来看，割圆术不仅仅是近似，而且蕴含了深刻的极限思想. 极限方法的最初应用都是依据于几何直观或人们的主观判断，该理论的进一步发展及极限概念的提出则与微积分学的建立紧密相连. 直至 19 世纪，维尔斯特拉斯给出了极限的精确定义，即 $\varepsilon - N$ 定义，借助该定义，可以定量地具体地刻画两个无限趋近过程，摆脱了对几何直观的依赖. 进一步地，利用极限，可以给出连续、导数、积分、级数及函数项级数的敛散性等重要概念. 可以说，极限是学习和研究大学数学的重要工具，极限思想是贯穿整个大学数学的一个重要方法. 作为大学数学一个重要分科的常微分方程，在其建立和发展中，都明显体现出极限的思想，例如柯西正是以严格化的极限理论为依托，在相当一般的条件下证明了解的存在唯一性定理，为微分方程的定性研究奠定了坚实的基础.

极限思想在常微分方程中一个直接应用是利用极限的定义或性质来考察方程解的性态，尤其是极限性态.

例 1-14 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续可微，且

$\lim\limits_{x\to\infty}[y(x) + y'(x)] = 0$，求证 $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$.

证明 设 $y(x) + y'(x) = z(x)$，解之，得

$$y(x) = e^{-x}\left(c + \int z(x)e^x dx\right) = ce^{-x} + e^{-x}\int z(x)e^x dx.$$

又$\lim\limits_{x\to\infty}z(x)=0$,故对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists x_0$,当$x>x_0$时,有$-\varepsilon<z(x)<\varepsilon$,从而有

$$-\varepsilon<\mathrm{e}^{-x}\int z(x)\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

所以$\lim\limits_{x\to\infty}y(x)=0$,得证.

例 1-15 考虑方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay=f(x),$$

若$f(x)$在$[0,+\infty]$上连续,且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$.求证:

(i) 当$a>0$时,方程一切解当$x\to\infty$时趋于$\frac{b}{a}$;

(ii) 当$a<0$时,方程只有一个解当$x\to\infty$时趋于$\frac{b}{a}$.

证明 解方程,得

$$y(x)=\mathrm{e}^{-ax}(c+\int_0^x f(x)\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x)(C\in R).$$

(i) 当$a>0$时,

若$b=0$且$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x$收敛,则$\lim\limits_{x\to\infty}y(x)=0=\frac{b}{a}$;

若$b\neq0$或$b=0$但$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x$发散,则

$$\lim_{x\to\infty}y(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{c+\int_0^x f(x)\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{ax}}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)\mathrm{e}^{ax}}{a\,\mathrm{e}^{ax}}=\frac{b}{a}.$$

(ii) 当$a<0$时,

$$\lim_{x\to\infty}y(x)=\frac{b}{a}\Leftrightarrow\lim_{x\to\infty}(c+\int_0^x f(x)\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x)=0.$$

所以

$$c=-\lim_{x\to\infty}\int_0^x f(x)\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x.$$

故当且仅当$c=-\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x$时,$\lim\limits_{x\to\infty}y(x)=\frac{b}{a}$.

在常微分方程中运用极限的思想和方法解决问题,还有一个重要思路:为确定某个变量,首先可确定其近似变量,而且该近似变量是一列近似程度越来越高的量,然后通过考察这一串变量的趋向,来确定欲求的量.以解的存在唯一性为例,逐步逼近列的方法就是构造以y_0为初始值,且逐步向真正解逼近的函数列$\varphi_n(t)$,通过对该函数列的性质讨论并求极限,得解$y(t)$,而欧拉折线法(详细分析见数形结合一节)也是逐步构造越来越细致的欧拉折线,在该过程中,近似程度随着每一条线段的逐步减小而越来越高,其极限状态即为原方程的积分曲线.又如构造方法中讲到的压缩映像原理,仍然是构造以不动点为极限点的点列,通过探讨该点列的性质,得不动点的存在唯一性.

从该方法的应用我们还可以看到,极限方法与近似思想是密不可分的,以逐步逼近法讨论解的存在唯一性为例,它不仅建立了确切的解的存在性结论,而且还可以由此给出近似解,并保证任意给定的近似程度.

例 1-16 设$x(t)$是$[t_0,t_1]$上的连续函数,且有

$$|x(t)|\leqslant M+K\int_0^t|x(\tau)|\mathrm{d}\tau,$$

其中M,K为非负常数,试用逐次逼近法证明

$$|x(t)|\leqslant M\mathrm{e}^{K(t-t_0)}.$$

证明 作函数列$\{x_n(t)\}$:

$$x_0(t)=M,$$

$$x_n(t)=M+K\int_{t_0}^t|x_{n-1}(\tau)|\mathrm{d}\tau,n=1,2,\cdots$$

显然$x_n(t)$在$[t_0,t_1]$上连续,且$x_n(t)\geqslant0$.展开表达式,有

$$x_1(t)=M+KM(t-t_0).$$

猜想

$$x_{n-1}(t)=M+KM(t-t_0)+\cdots+K^{n-1}M\frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!},$$

下证

$$x_n(t)=M+KM(t-t_0)+\cdots+K^nM\frac{(t-t_0)^n}{n!}.$$

事实上，

$$\begin{aligned}x_n(t)&=M+K\int_{t_0}^{t}|x_{n-1}(\tau)|\,d\tau\\&=M+K\int_{t_0}^{t}[M+KM(t-t_0)+\cdots\\&\quad+K^{n-1}M\frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}]d\tau\\&=M+KM(t-t_0)+K^2M\frac{(t-t_0)^2}{2!}+\cdots\\&\quad+K^nM\frac{(t-t_0)^n}{n!}.\end{aligned}$$

易证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)=Me^{K(t-t_0)}$.

考虑序列$\{|x(t)|-x_n(t)\}$：设 $M_1=\max\limits_{t\in[t_0,t_1]}|x(t)|$，有

$$|x(t)|-x_0(t)\leqslant K\int_{t_0}^{t}|x(\tau)|\,d\tau\leqslant KM_1(t-t_0).$$

猜想

$$|x(t)|-x_{n-1}(t)\leqslant\frac{K^nM_1(t-t_0)^n}{n!},$$

下证

$$|x(t)|-x_n(t)\leqslant\frac{K^{n+1}M_1(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

事实上

$$\begin{aligned}|x(t)|-x_n(t)&\leqslant K\int_{t_0}^{t}[|x(\tau)|-x_{n-1}(\tau)d\tau]\\&\leqslant\frac{K^{n+1}M_1}{n!}\int_{t_0}^{t}[(\tau-t_0)^n]d\tau\end{aligned}$$

$$=\frac{K^{n+1}M_1(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

故

$$|x(t)|\leqslant x_n(t)+\frac{K^{n+1}M_1(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

令 $n\to\infty$，得

$$|x(t)|\leqslant Me^{K(t-t_0)}.$$

以上讨论了常微分方程解析式形式的解的极限与近似，在考察解的全局性态时，还往往用到一类几何表示的极限解，即极限环. 简单来讲，若有轨线当 $t\to+\infty(-\infty)$ 时趋于某闭轨，则称该闭轨为极限环. 这里的闭轨，即体现为解的周期性质. 适当考虑极限环、奇点的性质，并结合某些变换(如 Poincare 变换等)，可以得到方程的全局面貌，求极限环相关性质时，我们往往考虑的是极限环的存在性、个数、稳定性及重数等，极限环在实际应用中也是非常重要的，如在无线电技术中，对于真空管发动器方程(即 Vanderpol 方程)，找出了极限环也就是找到了其自振过程；稳定的极限环对应于物理上的周期振动情形，不稳定的极限环则对应于物理上不能实现的周期振动. 具体到极限环的求法，一般来讲有两种：一是先求出特解，然后判断其他轨线对于该特解的趋近性质；二是通过构造特殊环域来直接寻求极限环，即 Bendixson 方法.

例 4　考虑 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+y-x(x^2+y^2)\\\dfrac{dy}{dt}=-x+y-y(x^2+y^2)\end{cases}$ 的极限环.

解　作极坐标变换，得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dr}{dt}=r(1-r^2),\\\dfrac{d\theta}{dt}=-1,\end{cases}$$

解之，得两个特解

$$r=0,\theta=t_0-t,t\geqslant t_0\text{（即原点）}$$

和

$$r=1,\theta=t_0-t,t\geqslant t_0\text{（为闭轨）}.$$

任取半径为 $R(>0)$，圆心为原点的圆（见图 1-6），考虑过其上任一点 (R,θ^*) 处轨线走向.

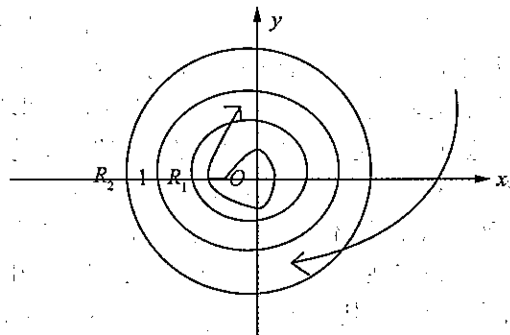


图 1-6

(1) 当 $R=R_1<1$ 时，

$$\begin{cases}\dfrac{dr}{dt}\Big|_{r=R_1}=R_1(1-R_1^2)>0,\\ \dfrac{d\theta}{dt}\Big|_{\theta=\theta^*}=-1<0.\end{cases}$$

所以轨线沿顺时针方向由圆内走向圆外.

(2) 当 $R=R_2>1$ 时，

$$\begin{cases}\dfrac{dr}{dt}\Big|_{r=R_2}=R_2(1-R_2^2)<0,\\ \dfrac{d\theta}{dt}\Big|_{\theta=\theta^*}=-1<0.\end{cases}$$

所以轨线沿顺时针方向由圆外走向圆内.

考虑环 $D=\{(r,\theta)\mid R_1<r<R_2\}$，$D$ 内无奇点，且过两边界

的轨线均由 D 外到 D 内且不再出 D，令 $R_1\to1-$，$R_2\to1+$，可验证 $r=1$ 为极限环，且为稳定的极限环.

例 1-18 用 Bendixson 方法给出极限环存在及不存在的充分条件，并以此为工具讨论上例的极限环及数学摆方程

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{g}{l}\sin x-\dfrac{\mu}{m}y\end{cases}\quad(\mu>0)$$

的极限环.

解：(1) 考虑 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=X(x,y),\\ \dfrac{dy}{dt}=Y(x,y),\end{cases}$ 其中 X,Y 在域 G 内有一阶连续偏导数.

(i) 若 G 内存在有界环形闭域 G^*，在其内不含方程的奇点，且过 G^* 内的点的解 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 当 $t\geqslant t_0(t\leqslant t_0)$ 时不离开该域，则必有以下两种情况之一：

(A) 该解为一个闭轨线；

(B) 该解按正向（负向）趋近于 G^* 内的某一闭轨.

(ii) 若 G 内存在单连通区域 G^{**}，在其内 $\dfrac{\partial X}{\partial x}+\dfrac{\partial Y}{\partial y}$ 不变号，且在 G^{**} 内的任何子域上不恒为 0，则方程在 G^{**} 内不存在周期解，从而也不存在极限环.

(2)(i) 考虑上例，对任意的闭环域 $G^*=\{(r,\theta)\mid 0<R_1\leqslant r\leqslant R_2\}$，$G^*$ 内无奇点 $(r=0)$，且易证当 $R_1<1$，$R_2>1$ 时过 G^* 上的点的解当 $t\geqslant t_0$ 时不离开 G^*，又易证所过点当且仅当满足 $r=1$ 时为闭轨，从而可得极限环 $r=1$.

(ii) 考虑数学摆方程，易证 $\dfrac{\partial X}{\partial x}+\dfrac{\partial Y}{\partial y}=-\dfrac{\mu}{m}<0$，应用(1)中

(ii) 可知方程组不存在周期解,从而无极限环.

§1.5 构造的思想

构造思想是根据考察对象的特征,构造与之相关且有助于问题解决的数学模型,通过对该模型的研究得到原对象相应的性质.构造的思想是常微分方程中一个重要的思想,我们经常从以下几个方面进行构造:

一、构造函数(映射)

我们往往用构造新函数的方法来探究给定函数的某些性质,如实现对方程根的讨论,或以导数为工具来证明数学等式及不等式,这些方法不仅体现在常微分方程中,而且也体现在其他大学数学分科中.在常微分方程中,一个有别于其他分科的体现在于经常以构造的函数为工具来研究原方程解(未知甚至不可求)的性质.如李雅普诺夫第二方法,即借助于构造一个特殊函数 $V(x,y)$,用 $V(x,y)$ 及其全导数 $\frac{dV(x,y)}{dt}$ 的性质来确定方程组解的稳定性.又如在研究极限环时,经常用到后继函数法,这种"后继函数"并非给出具体的函数表达式,但给出了一种对应关系,并利用所构造映射的性质得到极限环的稳定性.

例 1-19 考虑方程

$$\begin{cases} x' = -y + x(x^2+y^2-1), \\ y' = x + y(x^2+y^2-1), \end{cases}$$

零解的稳定性.

解 方法一 求通解,然后直接判断.

对原方程组进行极坐标变换,即令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 得

$$\begin{cases} r' = r(r^2-1), \\ \theta' = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \dfrac{1}{\sqrt{1-c_1 e^{2t}}}, \\ \theta = t + c_2. \end{cases}$$

设 $r(0) = r_0, \theta(0) = \theta_0$,则 $c_1 = \frac{r_0^2-1}{r_0^2}$.所以当 (x_0, y_0) 位于单位圆周之内时,有 $c_1 < 0$,此时轨线为单位圆内非闭曲线,当 $t \to +\infty$ 时,轨线逆时针盘旋趋向 $(0,0)$;而当 $t \to -\infty$ 时,轨线顺时针盘旋趋于单位圆周,从而 $(0,0)$ 为渐近稳定.

方法二 用 V 函数方法

构造 V 函数 $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$,则

(1) $V(0,0) = 0, V(x,y) > 0, (x,y) \neq 0$;

(2) $\frac{dV}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = (x^2+y^2)(x^2+y^2-1)$.

所以当 $0 < x^2+y^2 < 1$ 时, $\frac{dV}{dt} < 0$.

综合(1)(2)可知,平衡点 $(0,0)$(即零解)为渐近稳定.

分析 由以上比较可以看出,借助 V 函数分析稳定性更为简单.进一步地,可能有题目用直接的方法不能求解,这时,构造 V 函数方法就愈发重要了.

例 1-20 考虑方程

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -a^2\sin x, \end{cases} \quad (a > 0)$$

零解的稳定性.

解 令 $V(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + a^2(1-\cos x)$,

则(1) V 定正,(2) $\frac{dV}{dt} = 0$.所以原方程零解稳定.

例 1-21 已知 Γ 为动力系统

$$\begin{cases} x' = X(x,y), \\ y' = Y(x,y) \end{cases}$$

的闭轨，试用后继函数法讨论其稳定性.

分析：过Γ上任一点P作Γ的法线$\overline{MPN}$，P_0为法线上任一点，如图 1-7 所示，并记从P_0出发的轨线再次与$\overline{MN}$相交的点为P_1（要求P_0与P_1充分靠近），取P为坐标原点，Γ外法线方向为正.

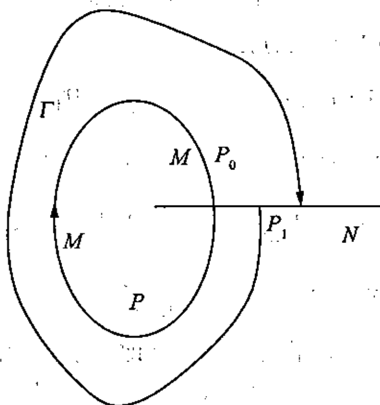


图 1-7

设P_0坐标为n_0，后继点P_1坐标为$n_1 = g(n_0)$（g称为后继函数）. 令$h(n_0) = g(n_0) - n_0$，则$h(0) = 0$，易知若$0 < n_0 = 1$时，有$h(n_0) < 0(> 0)$，则Γ为外侧稳定（不稳定）；若$n_0 < 0$且$0 < |n_0| = 1$时，有$h(n_0) > 0(< 0)$，则Γ为内侧稳定（不稳定）. 因此若$h(0) = h'(0) = L = h^{(k-1)}(0) = 0, h^{(k)} \neq 0$，则

$$h(n_0) = \frac{1}{k!}h^{(k)}(0)(n_0)^k + O[(n_0)^{k+1}].$$

从而当k为奇数且$h^{(k)} > (<)0$时，Γ为不稳定（稳定）的极限环，当k为偶数时，Γ为半稳定的极限环.

二、构造函数列

构造函数列（点列）是常微分方程中常用的方法，该方法是通过构造函数列（或点列）实现对其极限函数（极限点）性质的讨论，可以解决的问题包括解的存在性讨论及有关函数不等式的证明等，构造方法应用于前者时，一般使得极限函数（或极限点）即为所求解，应用于后者时，则一般使得极限函数为不等式中的主体函数，即满足给定不等式关系的函数. 应用构造函数列的方法解决问题需要注意一点，即往往我们只能得到极限函数（或极限点）所满足的性质，而不能给出其具体表达式，这是因为在构造函数列（点列）时，往往是逐步构造的，即迭代构造，所以该方法一般只用于定性的分析.

例 1-22　简述用 Picard 逐次逼近方法证明一阶微分方程解的存在唯一性定理的思路.

解　(1) 微分方程初值问题$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$同解于积分方程

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y)\mathrm{d}\xi.$$

(2) 构造逐次逼近函数列

$$\varphi_0(x) = y_0,$$

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi))\mathrm{d}\xi, n = 1,2,\cdots$$

(3) 证明$\{\varphi_n(x)\}$在$[x_0 - h, x_0 + h]$上一致收敛.

(4) 证明极限函数是积分方程的解，从而也是原微分方程初值问题的解.

(5) 用反证法证明唯一性.

例 1-23　证明 Gronwall 不等式：设k为非负常数，$f(t), g(t)$为$[a,b]$上的连续非负函数，且满足不等式

$$f(t) \leqslant k + \int_a^t f(s)g(s)\mathrm{d}s, \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

则有 $f(t) \leqslant k\mathrm{e}^{\int_a^t g(s)\mathrm{d}s}, a \leqslant t \leqslant b.$

证明 构造函数列

$$f_0(t) = k,$$

$$f_n(t) = k + \int_a^t f_{n-1}(s)g(s)\mathrm{d}s, \ n = 1,2,\cdots$$

具体写出：

$$f_0(t) = k,$$

$$f_1(t) = k + k\int_a^t g(s)\mathrm{d}s,$$

$$f_2(t) = k + k\int_a^t \left[1 + \int_a^s g(\tau)\mathrm{d}\tau\right]g(s)\mathrm{d}s$$

$$= k + k\int_a^t g(s)\mathrm{d}s + \frac{k}{2!}\left[\int_a^t g(s)\mathrm{d}s\right]^2,$$

$$\cdots$$

数学归纳法可证

$$f_n(t) = k + k\int_a^t g(s)\mathrm{d}s + \cdots + \frac{k}{n!}\left[\int_a^t g(s)\mathrm{d}s\right]^n,$$

所以
$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = k\mathrm{e}^{\int_a^t g(s)\mathrm{d}s}.$$

考虑函数列

$$f(t) - f_0(t), f(t) - f_1(t), \cdots, f(t) - f_n(t), \cdots$$

设 $M = \max\limits_{t\in[a,b]} f(t)$，有

$$f(t) - f_0(t) \leqslant \int_a^t f(s)g(s)\mathrm{d}s \leqslant M\int_a^t g(s)\mathrm{d}s,$$

$$f(t) - f_1(t) \leqslant \int_a^t [f(s) - f_0(s)]g(s)\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \int_a^t M\left[\int_a^s g(\tau)\mathrm{d}\tau\right]g(s)\mathrm{d}s = \frac{M}{2!}\left[\int_a^t g(s)\mathrm{d}s\right]^2,$$

$$\cdots$$

由数学归纳法可证

$$f(t) - f_n(t) \leqslant \frac{M}{(n+1)!}\left[\int_a^t g(s)\mathrm{d}s\right]^{n+1},$$

所以
$$f(t) \leqslant f_n(t) + \frac{M}{(n+1)!}\left[\int_a^t g(s)\mathrm{d}s\right]^{n+1},$$

令 $n \to \infty$，得 $f(t) \leqslant k\mathrm{e}^{\int_a^t g(s)\mathrm{d}s}$. 证毕.

例 1-24 已知函数 $f(x)$ 在 R 上有定义，若存在 N：$0 < N < 1$，使对任意的 $x_1 \neq x_2$，有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant N|x_1 - x_2|$，求证方程 $x = f(x)$ 存在唯一解.

证明 首先易证 $f(x)$ 在 R 上连续.

任取 $x_0 \in R$，构造点列 $\{x_n\}$：$x_{n+1} = f(x_n), n = 0,1,2,\cdots$ 则

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leqslant N|x_n - x_{n-1}|$$

$$\leqslant \cdots \leqslant N^n |x_1 - x_0|.$$

所以对任意的 $p \in N$，有

$$|x_{n+p} - x_n| \leqslant (N^{n+p-1} + N^{n+p-2} + \cdots + N^n)|x_1 - x_0|$$

$$= N^n|x_1 - x_0|\frac{1 - N^p}{1 - N} < N^n|x_1 - x_0|\frac{1}{1 - N}.$$

易见 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列，从而 $\{x_n\}$ 收敛，记 $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$，则

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x^*),$$

即 x^* 为方程 $x = f(x)$ 的解.

若还有 $\bar{x}$ 也是方程的解，且 $\bar{x} \neq x^*$，则

$$|\bar{x} - x^*| = |f(\bar{x}) - f(x^*)|$$

$$\leqslant N|\bar{x} - x^*| < |\bar{x} - x^*|,$$

矛盾.

综上所述，方程 $x = f(x)$ 存在唯一解.

从以上例子可以看到，利用构造函数列的方法解决有关函数性质的问题，从其构造思路来看应该是逆向的，即由要证明的结论出发，猜想可能的函数列构造形式，再通过具体的论述说明极限函

数满足结论.

三、构造方程(组)

构造方程的思路在常微分方程中一般体现在两个方面,其一是沿用了初等方程的意义和特点,即当原问题没有体现出易于求解的特点或其中变量关系不易分析时,我们可以从原问题出发,构造初等方程、积分方程、微分方程或相应的方程组;如极限思想中的例1-14,已知 $y(x)+y'(x)$ 极限性质,要求 $y(x)$ 的极限性质,解决方法中令 $y(x)+y'(x)$,即构造关于 $y(x)$ 的未知函数. 构造方程体现之二在于有时为了求解微分方程或求方程的某些性质,我们往往需要构造新的方程,这个方程称为辅助方程,其形式可以是初等方程,也可以是积分或微分方程,甚至可以是不等式方程. 一个体现比较明显的例子是利用单调迭代技巧求方程解的存在性,其中对辅助方程(为不等式方程)解的分析即为比较定理,而这也正是单调迭代技巧的关键所在.

例 1-25 求下列两个微分方程的公共解:

$(1)y'=y^2+2x-x^4$;$(2)y'=2x+x^2+x^4-y-y^2$.

解 构造初等方程

$$y^2+2x-x^4=2x+x^2+x^4-y-y^2,$$

计算得解 $y=x^2$ 和 $y=-\frac{1}{2}-x^2$.

又因为构造的方程扩大了解的范围,故可能产生增根,代回微分方程中任意一个验证,得公共解为 $y=x^2$.

例 1-26 求具有性质 $x(t+s)=\dfrac{x(t)+x(s)}{1-x(t)x(s)}$ 的函数 $x(t)$,已知 $x'(0)$ 存在.

解 令 $t=s=0$,得 $x(0)=0$.

原等式两边同时对 s 求导,有

$$x'(t+s)=\frac{x'(s)(1+x^2(t))}{(1-x(t)x(s))^2}.$$

令 $s=0$,得 $x'(t)=x'(0)(1+x^2(t))$,解之,得

$$\arctan x(t)=x'(0)t+c.$$

代入初值条件 $x(0)=0$,得 $c=0$,即

$$x(t)=\tan(x'(0)t).$$

例 1-27 求解方程组

$$\begin{cases}x'(t)=p(t)x+q(t)y,\\ y'(t)=q(t)x+p(t)y,\end{cases}$$

其中 $p(t),q(t)$ 在$[a,b]$上连续.

解 两方程相加,得关于 $x(t)+y(t)$ 的方程

$$(x+y)'=(p(t)+q(t))(x+y),$$

解之,得

$$x+y=c_1\mathrm{e}^{\int[p(t)+q(t)]\mathrm{d}t},$$

两方程相减,得关于 $x(t)-y(t)$ 的方程

$$(x-y)'=(p(t)-q(t))(x-y),$$

解之,得

$$x-y=c_2\mathrm{e}^{\int[p(t)-q(t)]\mathrm{d}t}.$$

从而

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}c_1\mathrm{e}^{\int[p(t)+q(t)]\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}c_2\mathrm{e}^{\int[p(t)-q(t)]\mathrm{d}t}\\ y=\frac{1}{2}c_1\mathrm{e}^{\int[p(t)+q(t)]\mathrm{d}t}-\frac{1}{2}c_2\mathrm{e}^{\int[p(t)-q(t)]\mathrm{d}t}\end{cases}$$

是原方程的通解.

例 1-28 简述欧拉待定指数函数法的理论依据.

解 一阶常系数齐次线性微分方程通解形式的启发,寻求 n 阶常系数齐次线性微分方程

$$L(x)=x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=0$$

形如 $e^{\lambda t}$ 的解（λ 为待定常数）. 代入计算，得 $L[e^{\lambda t}] = F(\lambda)e^{\lambda t}$，其中

$$F(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

故 $e^{\lambda t}$ 是原方程解的充要条件为 λ 是代数方程

$$F(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

的解. 称该代数方程为原方程的特征方程，其根称为特征根.

四、构造参数

对于方程 $F(x,y,y') = 0$，若难以从中求解 y' 关于 x,y 的表达式，或者即使可以求出，表达式也相当复杂，则往往考虑构造参数，以期使方程变为导数已解出的形式. 常见的用该种方法可求解的类型有：$y = f(x,y')$，$x = f(y,y')$，$F(x,y') = 0$，$F(y,y') = 0$. 从形式上来看，前两种类型求解第一步都是构造参数 $p = \dfrac{dy}{dx}$，接下来构造以 p 为未知函数的微分方程，其中前者变为 $y = f(x,p)$，对 x 求导得 $p = f_x + f_p p'$，后者变为 $x = f(y,p)$，对 y 求导得 $\dfrac{1}{p} = f_y + f_p p'$，分别再利用初等积分法得到方程参数解. 对 $F(x,y') = 0$ 和 $F(y,y') = 0$ 两种情况，则需要针对具体题目的特点，引入不同的参数.

例 1-29 求解方程 $x^3 + y'^3 - 3xy' = 0$.

解 令 $y' = p = tx$，代入，得

$$x = \frac{3t}{1+t^3}.$$

从而

$$p = \frac{3t^2}{1+t^3} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx},$$

所以

$$\frac{dy}{dt} = p\frac{dx}{dt} = \frac{9(1-2t^3)t^2}{(1+t^3)^3}.$$

积分，得

$$y = \frac{3}{2} \cdot \frac{1+4t^3}{(1+t^3)^2} + C.$$

所以方程参数形式的通解为

$$\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1+4t^3}{(1+t^3)^2} + C. \end{cases}$$

五、构造解

构造解是指构造解的形式. 如求解线性非齐次方程 $y' = P(x)y + Q(x)$ 时，由常数变易法可构造形式解 $y = C(x)e^{\int P(x)dx}$（其中 $C(x)$ 待定）. 又如求解高阶常系数线性非齐次方程时，若非齐次项 $f(x)$ 为指数函数、弦函数、多项式函数及三者乘积的形式，则可用待定系数法求特解，其理论依据在于对此种形式的 $f(x)$ 求导任意有限次，其形式仍保持不变，从而各阶导数的线性组合也具有同样的形式.

构造解的方法是常微分方程中一类比较特殊的方法，其理论来源我们可以称之为解的结构的思想，即从分析某种类型方程解的结构入手，求出结构解（或称形式解）中的待定量（有时是常数，也有时是函数）. 这种方法之所以在微分方程中是可行的，是因为微分方程的未知量是函数，而在以数为未知量的初等方程中，构造解的方法则是不可实现的.

例 1-30 求解方程 $x'' - 2x' + x = t - 3$.

解 特征根为 $\lambda = 1$（二重），所以相应齐次线性方程通解为

$$x(t) = C_1e^t + C_2te^t.$$

寻求形如 $\bar{x}(t) = At + B$ 的特解，代入方程，得

$$A = 1, B = -1.$$

所以原方程通解为

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t + t - 1.$$

§1.6 级数的思想

级数是研究函数的一个重要工具，在理论和应用方面都处于重要的地位. 一方面，可以借助级数表示很多常用的非初等函数，另一方面，可以将函数表为级数形式从而借助级数来研究函数性态. 继微分方程发展最初期的"求通解"阶段之后，人们意识到求微分方程有限的初等函数或初等函数积分形式的解往往是比较困难甚至是不可实现的，所以进而转向"无限形式"解的寻求，如级数形式的解. 牛顿、莱布尼兹、欧拉、贝塞尔等人都曾应用级数解法求解过一些特殊的微分方程. 18 世纪中叶，级数解法开始在常微分方程解法中占据重要位置. 人们之所以重视这种方法，当然首先是该方法的可应用性，还有一个重要的原因是，级数解所表示的函数在数学物理中有着特殊的应用，另一方面，从纯数学角度来看，这种解已不是初等函数，因此又可以由此出发通过解特殊方程来构造特殊的超越函数.

本(专) 科阶段学习的级数解法仅限于讨论二阶线性微分方程

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0,$$

相应的结论和方法也可以推广到高阶，针对二阶方程的主要结论如下：

(i) 设方程 $p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ 中的系数函数 $p_0(x), p_1(x), p_2(x)$ 在区间 $|x - x_0| < r$ 可以展成 $(x - x_0)$ 的收敛的幂级数，且 $p_0(x_0) \neq 0$，则该方程在区间 $|x - x_0| < r$ 内有收敛的幂级数解 $y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n$，其中 C_0 和 C_1 是两个任意常数

(它们可以通过初值条件确定)，而 $C_n (n \geqslant 2)$ 可以从 C_0 和 C_1 出发依次由递推公式确定.

(ii) 设方程 $p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ 中的系数函数 $p_0(x), p_1(x), p_2(x)$ 在区间 $|x - x_0| < r$ 可以展成 $(x - x_0)$ 的收敛的幂级数，且 x_0 是 $p_0(x)$ 的 s 重零点，是 $p_1(x)$ 的不低于 $s-1$ 重零点(若 $s > 1$)，是 $p_2(x)$ 的不低于 $s-2$ 重零点(若 $s < 2$)，则该方程在区间 $|x - x_0| < r$ 内有收敛的幂级数解

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n,$$

其中 r 是某一实数.

例 1-31　求解勒让德方程

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0,$$

其中 n 为常数.

解　由结论(i) 知，方程有幂级数解 $y = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$，将该形式解代入原方程，得

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1)C_{k+2} + (n+k+1)(n-k)C_k] x^k = 0,$$

进一步得递推公式

$$(k+2)(k+1)C_{k+2} + (n+k+1)(n-k)C_k = 0, k = 0,1,2,\cdots$$

所以有

$$C_{2m} = (-1)^m \frac{(n-2m+2)\cdots(n-2)n(n+1)(n+3)\cdots(n+2m-1)}{(2m)!} C_0,$$

$$C_{2m+1} = (-1)^m \frac{(n-2m+1)\cdots(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)\cdots(n+2m)}{(2m+1)!} C_1,$$

得勒让德方程的幂级数解为

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} [C_{2k} x^{2k} + C_{2k+1} x^{2k+1}].$$

上例中幂级数解又可写为 $y = c_0 y_1(x) + C_1 y_2(x)$，其中 C_0 和

C_1 为任意常数，而

$$y_1(x)=1-\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4-\cdots$$

$$y_2(x)=x-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3+\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5-\cdots$$

显然，$y_1(x)$，$y_2(x)$ 线性无关，且当 n 为偶数时，$y_1(x)=P_n(x)$ 为 n 次多项式；当 n 为奇数时，$y_2(x)=P_n(x)$ 为 n 次多项式，且可验证，除一个常数因子外，$P_n(x)$ 可记为统一的形式

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}.$$

该多项式称为勒让德多项式，它在表示方程的解及数学物理方程中有着重要而特殊的应用.

例 1-32 求贝塞尔方程 $x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$ 在 $x=0$ 点邻域内的幂级数解，其中 n 为常数.

解 由结论(ii)知，方程有形如 $y=\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_kx^{r+k}$ 的解.

将上述形式解逐项微分两次，并代入原方程，并比较 x 的同次幂的系数，得

(1)$r=n\geqslant 0$ 时，

$$C_{2k+1}=0,C_{2k}=\frac{(-1)^kC_0}{2^{2k}k!(n+1)(n+2)\cdots(n+p)},$$

所以此时解为

$$y=C_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kx^{2k+n}}{2^{2k}k!(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}.$$

特别地，可取 $C_0=\dfrac{1}{2^n\Gamma(n+1)}$，得解

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}{k!\Gamma(n+p+1)}:=J_n(x).$$

(2)$r=-n<0$ 且 n 不为正整数时，

$$C_{2k+1}=0,C_{2k}=\frac{(-1)^kC_0}{2^{2k}k!(-n+1)(-n+2)\cdots(-n+p)},$$

特别地，若取 $C_0=\dfrac{1}{2^{-n}\Gamma(-n+1)}$，得解

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}}{k!\Gamma(-n+p+1)}=J_{-n}(x).$$

又易证 $J_n(x)$ 与 $J_{-n}(x)$ 线性无关，所以原方程通解可记为

$$y=a_1J_n(x)+a_2J_{-n}(x),$$

其中 a_1,a_2 为任意常数，n 不为正整数.

该例中的 $J_n(x)$ 与 $j_{-n}(x)$ 分别称为 n 级第一类贝塞尔函数和 $-n$ 级第一类贝塞尔函数，而当 n 为正整数时，$J_n(x)$ 与 $J_{-n}(x)$ 线性相关，此时需要用到其他的方法，所得的特解称为第二类贝塞尔函数. 贝塞尔函数是一类超越函数，在无线电电子学、工程技术及天文学中有着广泛的应用.

例 1-33 证明 $x=J_\alpha(kt)$ 是方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{1}{t}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+(k^2-\dfrac{\alpha^2}{t^2})x=0$ 的解.

解 令 $z=kt$，代入原方程，得

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}z^2}+\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+(1-\frac{\alpha^2}{z^2})x=0.$$

该方程为 $n=\alpha$ 时的贝塞尔方程，故有 $x=J_\alpha(z)$，代回原变量，得原方程的解 $x=J_\alpha(kt)$.

例 1-34 证明 $\dfrac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{a}{t}\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}+k^2w=0$ 可化为 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{1}{t}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+(k^2-\dfrac{\alpha^2}{t^2})x=0$ 的形式，并由此证明 $\sin t,\cos t$ 是 $\sqrt{t}J_{\frac{1}{2}}(t)$ 与 $\sqrt{t}J_{-\frac{1}{2}}(t)$

的线性组合.

证明 令 $w = t^s x$，代入原方程，得

$$t^s \frac{d^2x}{dt^2} + (2s+a)t^{s-1}\frac{dx}{dt} + [s(s-1) + as + k^2t^2]t^{s-2}x = 0.$$

取 $2s + a = 1$，即 $s = \frac{1-a}{2}$，令 $\alpha^2 = \frac{(1-a)^2}{4}$，得

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dx}{dt} + \left(k^2 - \frac{\alpha^2}{t^2}\right)x = 0.$$

该方程为贝塞尔方程，故有解 $J_\alpha(kt)$，$J_{-\alpha}(kt)$. 现取 $a = 0$，即 $\alpha = \frac{1}{2}$，得 $J_{\frac{1}{2}}(kt)$，$J_{-\frac{1}{2}}(kt)$ 是方程的解. 代回原变量，得 $w_1 = \sqrt{t}J_{\frac{1}{2}}(kt)$，$w_2 = \sqrt{t}J_{-\frac{1}{2}}(kt)$ 是方程的解. 容易验证 $\sin t$，$\cos t$ 是方程 $\frac{d^2w}{dt^2} + w = 0$ 的解，因此 $\sin t$，$\cos t$ 可表为 $\sqrt{t}J_{\frac{1}{2}}(t)$ 与 $\sqrt{t}J_{-\frac{1}{2}}(t)$ 的线性组合.

级数的思想体现在常微分方程中，不仅是用于解某些方程，还可以用于讨论方程的性质，如在利用逼近函数列方法证明解的存在唯一性时，我们就是利用构造函数项级数的方法讨论所构造的函数列的一致收敛性，进而得极限函数所满足的性质，从而证得解的存在性.

应用级数方法求解微分方程，需注意必须验证结论的条件，即关于系数函数解析的要求，如一阶微分方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-x}{x}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

假设有幂级数解 $y = C_1x + C_2x^2 + \cdots$ 代入方程并比较系数，有 $C_1 = C_1 - 1$，矛盾.

§1.7 化归的思想

所谓化归，是指通过一定的变换或转化，将一般化为特殊，将

复杂化为简单，从而用特殊的简单的方法解决一般的复杂的问题. 利用化归的思想解决问题的基本步骤是通过合适的化归，将原问题化为易于求解的问题，然后应用一定的数学方法和技巧求解该问题，最后通过逆化归得到原问题的解. 化归方法的基本思想如图 1-8 所示.

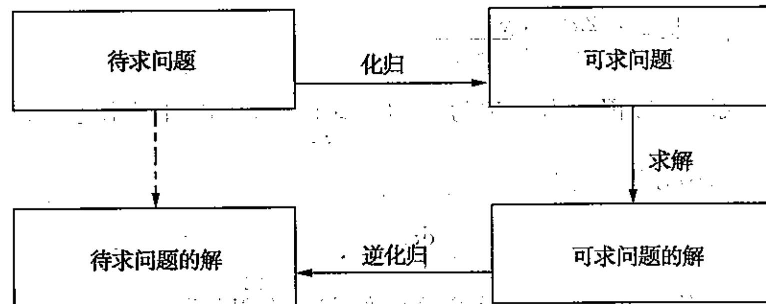


图 1-8

化归方法的核心即简化和转化. 简化是指通过分析和抽象等过程，抓住问题的本质，而转化则指通过一定的"映射"实现原问题的等价变形以期易于求解.

化归思想在常微分方程中的体现可用一句话来概括，即将不易求解或不易直接探讨其性质的微分方程转化为易于求解或易于探讨其性质的方程，该方程有可能是微分方程，也有可能是积分方程或代数方程. 例如在利用初等积分法求解简单的微分方程时，我们就是运用化归的思想，将不同形式的方程转化为两端可积分的形式；又如在求证一阶微分方程解的存在性时，我们首先将微分方程转化为同解的积分方程，目的在于易于构造逼近列的形式，进而得解；再如求解形如 $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ 的方程时，如果又有 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$，则由数学分析的知识得 $u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy = C$ 为方程的通解，但若 $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$，则可以通过

寻找积分因子 $\mu(x,y)$，得与原方程同解的恰当微分方程.

例 1-35 求解下列一阶微分方程：

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$,

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x+3y-1}{3x+2y-4}$,

(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x(2x^2+3y^2-7)}{y(3x^2+2y^2-8)}$.

解 (1)因为右端项为 $\dfrac{y}{x}$ 的显式函数，所以可以引进变换 $u=\dfrac{y}{x}$，则方程可化为

$$x\frac{du}{dx}=u^2,$$

$u=0$ 显然是解，若 $u\neq0$，利用分离变量法，求积分得

$$u(x)=-\frac{1}{\ln|x|+c}.$$

代回原变量，得解 $y=0$ 和 $y=-\dfrac{x}{\ln|x|+c}$.

(2)该方程右端项中若没有常数项，则易写为 $\dfrac{y}{x}$ 的显式函数，可用(1)的方法求解，所以首先的工作应是利用尽量简单的变换去掉常数.

令

$$\begin{cases}2\alpha+3\beta-1=0,\\3\alpha+2\beta-4=0,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}\alpha=2,\\\beta=-1.\end{cases}$$

作变换 $\begin{cases}x=X+2,\\y=Y-1,\end{cases}$ 原方程化为

$$\frac{dX}{dY}=\frac{2X+3Y}{3X+2Y}=\frac{2+3\dfrac{Y}{X}}{3+2\dfrac{Y}{X}}.$$

令 $u=\dfrac{Y}{X}$，得变量分离方程，两端积分，得

$$(u+1)^{\frac{1}{2}}(u-1)^{-\frac{5}{2}}=X^2,$$

代回原变量，得

$$(y+x-1)^{\frac{1}{2}}(y-x+3)^{-\frac{5}{2}}=(x-2)^2.$$

(3)该方程较之(2)更为复杂，但注意到右端项中多次出现 x^2,y^2，而 x,y 又都是单独出现的，所以仍可以从化归的角度看，将方程化为关于 x^2,y^2 的新方程.

令 $x^2=X,y^2=Y$，可得

$$\frac{dY}{dX}=\frac{ydy}{xdx}=\frac{2X+3Y-7}{3X+2Y-8},$$

再由类似(2)的思路，作两次变量变换，解之，并代回原来变量，得

$$(x^2+y^2-3)^{\frac{1}{2}}(x^2-y^2-1)^{-\frac{5}{2}}=1.$$

分析 利用转化的思想解决问题，往往是首先在形式上初步判断要转化的目标形式，再进行细致分析，而目标形式的要求不外乎两个：其一，必须与待求解的问题相关，即可行性；其二，必须是我们所较为熟悉的易求解的问题，即可解性.

例 1-36 分别用直接解法和拉普拉斯变换法求解方程

$$\begin{cases}x''+2x'+2x=2e^{3t},\\x(0)=0,x'(0)=0.\end{cases}$$

和方程组

$$\begin{cases} x'=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} x+\begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ x(0)=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

解:(1)(A)直接解法

该方程的特征根为 $\lambda=-1$ 和 $\lambda=-2$,所以相应齐次线性微分方程的通解为

$$x=c_1 e^{-t}+c_2 e^{-2t}.$$

寻求原方程形如 $x_0(t)=Ae^{3t}$ 的特解,代入,得 $A=\frac{1}{10}$. 所以原方程的通解为

$$x=c_1 e^{-t}+c_2 e^{-2t}+\frac{1}{10}e^{3t}.$$

代入初始条件,得 $c_1=-\frac{1}{2}$,$c_2=\frac{2}{5}$. 故方程解为

$$x(t)=-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{2}{5}e^{-2t}+\frac{1}{10}e^{3t}.$$

(B) 拉普拉斯变换法

设 $L[x(t)]=X(s)$,对方程两端同时进行拉普拉斯变换,得

$$X(s)(s+1)(s+2)=\frac{2}{s-3},$$

求解,得

$$X(s)=\frac{2}{(s+1)(s+2)(s-3)}=\frac{-1}{2(s+1)}+\frac{2}{5(s+2)}+\frac{1}{10(s-3)},$$

对上述解进行拉普拉斯逆变换,得

$$x(t)=-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{2}{5}e^{-2t}+\frac{1}{10}e^{3t}.$$

(2)(A)直接解法

记 $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$,则 $\exp At=e^{3t}\begin{bmatrix} \cos5t & \sin5t \\ -\sin5t & \cos5t \end{bmatrix}$,代入求解

公式,得

$$\begin{aligned} x(t)&=e^{3t}\begin{bmatrix} \cos5t & \sin5t \\ -\sin5t & \cos5t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &=\int_0^t e^{3(t-s)}\begin{bmatrix} \cos5(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin5(t-s) & \cos5(t-s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-s} \\ 0 \end{bmatrix} ds \\ &=e^{3t}\begin{bmatrix} \sin5t \\ \cos5t \end{bmatrix}+e^{3t}\int_0^t e^{-4s}\begin{bmatrix} \cos5g & \cos5t+\sin5t\sin5s \\ -\sin5t & \cos5s+\cos5t\sin5s \end{bmatrix} ds \\ &=\frac{1}{41}e^{3t}\begin{bmatrix} 4\cos5t+46\sin5t-4e^{-4t} \\ 46\cos5t-4\sin5t-5e^{-4t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(B)拉普拉斯变换法

首先将方程写为分量形式

$$\begin{cases} x_1'=3x_1+5x_2+e^{-t}, \\ x_2'=-5x_1+3x_2; \\ x_1(0)=0, \\ x_2(0)=1, \end{cases}$$

令 $X_1(s)=L[x_1(t)]$,$X_2(s)=L[x_2(t)]$,得

$$\begin{cases} sX_1(s)=3X_1(s)+5X_2(s)+\frac{1}{s+1}, \\ sX_2(s)-1=-5X_1(s)+3X_2(s), \end{cases}$$

解该代数方程组,得

$$\begin{cases} X_1(s)=\frac{1}{41}\left[4\frac{s-3}{(s-3)^2+5^2}+46\frac{5}{(s-3)^2+5^2}-4\frac{1}{s+1}\right], \\ X_2(s)=\frac{1}{41}\left[46\frac{s-3}{(s-3)^2+5^2}-4\frac{5}{(s-3)^2+5^2}-5\frac{1}{s+1}\right]. \end{cases}$$

对上述解进行拉普拉斯逆变换,得

$$\begin{cases} x_1(t)=\frac{1}{41}e^{3t}[4\cos5t+46\sin5t-4e^{-4t}], \\ x_2(t)=\frac{1}{41}e^{3t}[46\cos5t-4\sin5t-5e^{-4t}]. \end{cases}$$

分析 拉普拉斯变换法是求解常系数线性微分方程的一个特殊而重要的方法，其基本思路在于用拉普拉斯变换将微分方程(组)化为代数方程(组)，求其解，再通过拉普拉斯逆变换得到原方程的解. 如图 1-9 所示.

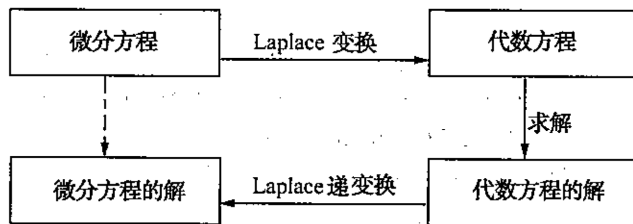


图 1-9

例 1-37 求初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}=t^2+x^2,\\ x(0)=0,x'(0)=1\end{cases}$$

的第三次近似解.

解 令 $x_1(t)=x(t),x_2(t)=x'(t)$，则原问题可化为与之等价的一阶初值问题

$$\begin{cases}x_1'=x_2,\\ x_2'=t^2+x_1^2,\\ x_1(0)=0,\\ x_2(0)=1,\end{cases}$$

从而可以用构造逼近列的方法，得

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}_{(3)}=\begin{pmatrix}t+\dfrac{1}{6}t^4\\ 1+\dfrac{2}{3}t^3+\dfrac{1}{36}t^2+\dfrac{1}{1296}t^9\end{pmatrix},$$

所以原方程的第三次近似解为

$$x(t)=t+\frac{1}{6}t^4.$$

分析 高阶微分方程没有一般的求通解的方法，同样地，对于高阶微分方程初值问题，也没有求近似解的一般方法，但我们可以将高阶方程化为一阶微分方程组，进而用逐次迭代的方法求解.

例 1-38 求解伯努利方程 $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n$，其中 $n>1$ 为正整数.

解 方程两端同时乘 $\dfrac{1}{y^n}$，得

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+(1-n)y^{1-n}p(x)=(1-n)q(x),$$

令 $z=y^{1-n}$，得

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x),$$

上式为关于 $z(x)$ 的一阶线性微分方程，可用常数变易法求其通解为

$$z(x)=\left[C+(1-n)\int q(x)e^{(n-1)\int p(x)dx}dx\right]e^{(n-1)\int p(x)dx},$$

代回原变量，得

$$y(x)=z^{\frac{1}{1-n}}=\left\{\left[C+(1-n)\int q(x)e^{(n-1)\int p(x)dx}dx\right]e^{(n-1)\int p(x)dx}\right\}^{\frac{1}{1-n}}.$$

例 1-39 若已知李卡蒂方程 $\dfrac{dy}{dx}=p(x)y^2+q(x)y+r(x)$ ($p(x),q(x),r(x)$ 在区间 I 上连续，且 $p(x)\neq0$) 的一个特解为 $y=\varphi(x)$，求方程通解.

解 令 $y=u+\varphi(x)$，得

$$\frac{du}{dx}+\frac{d\varphi}{dx}=p(x)[u^2+2\varphi(x)u+\varphi^2(x)]+q(x)[u+\varphi(x)]+r(x),$$

因为 $y=\varphi(x)$ 是原方程的解，所以上式可化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=[2p(x)\varphi(x)+q(x)]u+p(x)u^2.$$

该式为关于 $u(x)$ 的伯努利方程，可按例 4 方法求解.

§1.8 定性分析的思想

从古埃及时代开始，人们就尝试用方程来表达和求解几个量之间的关系. 17 世纪，随着微积分理论的发展和对物理现象研究的逐步深入，人们开始用微分方程来描述变量间的关系. 对于微分方程，在很长一段时间内，各国数学家都将重点放在如何用初等积分法求微分方程的初等函数解或初等函数积分形式的解，但初等积分法仅适用于某些特殊方程，特别是 1841 年，刘维尔证明了即使是形式上很简单的李卡蒂方程，也无法用初等积分法求解，这就促使人们寻求别的解决方法. 19 世纪，算子方法和拉普拉斯变换方法的提出，为人们寻找微分方程级数形式的解提供了理论基础，但所有这些方法都仅用于某些特殊方程，而对于一般的微分方程并没有行之有效的求解方法. 19 世纪 80 年代，庞加莱在研究 n 体问题时发现了原有方法的局限性，进而开始着手从方程形式出发来判断解的性质，并以此为基础进一步建立了微分方程定性理论的基本框架. 从此之后，定性理论得到了很大的发展，并逐渐成为微分方程的一个重要分支和研究方向. 从某种程度上来说，定性理论在微分方程这门学科的发展完善和现实问题的解决中所起的作用远远大于初等积分法求通解，这不仅是因为两者适用范围大小迥异，更是因为在许多现实模型中，我们往往没有必要花太大的气力求解的精确形式（甚至近似解也不需要），而只需了某个系统解的存在性、唯一性、有界性、稳定性等，这些也正是定性理论所要研究的内容. 下面我们看几个定性分析的结论和例子.

例 1-40 简述一阶微分方程解的存在唯一性定理及解的延

展定理，并证明 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2$ 的任一解的存在区间都有界.

解 (1) 若 $f(x,y)$ 在矩形域 $D=\{(x,y):|x-x_0|\leqslant a,|y-y_0|\leqslant b\}$ 上连续且关于 y 满足利普希兹条件，则

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y),\\ y(x_0)=y_0,\end{cases}$$

存在唯一的连续解 $y=\varphi(x),x\in[x_0-h,x_0+h]$，其中

$$h=\min\{a,\frac{b}{M}\},M=\max_{(x,y)\in D}|f(x,y)|.$$

(2) 若 $f(x,y)$ 在有界区域 D 中连续且在 D 内关于 y 满足局部的利普希兹条件，则

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y),\\ y(x_0)=y_0((x_0,y_0)\in \mathrm{int}G)\end{cases}$$

的解 $y=\varphi(x)$ 可向左右延展，直至 $(x,\varphi(x))$ 任意接近区域 D 的边界.

(3) 由解的存在唯一性定理知，该方程过平面上任一点 $P_0(x_0,y_0)$ 的解均局部存在唯一，记 $y=f(x)$，又由解的延展定理知，该解可延展至无限远离 P_0.

设 $y=f(x)$ 的右行解最大存在区间为 $J^+=[x_0,\beta_0)$ $(\beta_0>x_0)$]，则：

若 $\beta_0\leqslant 0$，显然 J^+ 为有限区间；

若 $\beta_0>0$，则存在 $x_0:0<x_1<\beta_0$，从而 $y=f(x)$ 在 $[x_1,\beta_0)$ 内满足方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2$，所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\geqslant x_1^2+y^2\,(x_1\leqslant x\leqslant\beta_0)$，即 $\frac{y'}{x_1^2+y^2}\geqslant 1$，对该不等式从 x_1 到 x 积分，得

$$\frac{1}{x_1}\left[\arctan\frac{f(x)}{x_1}-\arctan\frac{f(x_1)}{x_1}\right]\geqslant x-x_1\geqslant 0.$$

从而

$$0\leqslant x-x_1\leqslant\frac{\pi}{x_1}(x_1\leqslant x<\beta_0).$$

得 β_0 为有限数,即 J^+ 为有限区间.

同理可证,方程左行解的最大存在区间也有界.原结论得证.

例 1-41 几个二阶微分方程边值问题解的存在性结论.

(1)考虑边值问题

$$\begin{cases}-Lu=(p(x)u')'+q(x)u=g(x),x\in I=[a,b],\\ R_1(u)=\alpha_1u(a)+\beta_1u(a)=0,\\ R_2(u)=\alpha_2u(b)+\beta_2u(b)=0,\end{cases}$$

若满足以下条件:

(i) $p(x)\in C^1(I),p(x)>0,q(x)\in C(I)$;

(ii) $\alpha_1^2+\beta_1^2\neq0,\alpha_2^2+\beta_2^2\neq0$;

(iii) $g(x)\in C(I)$;

(iv)相应的奇次边值问题 $\begin{cases}-Lu=0,x\in I=[a,b]\\ R_1(u)=R_2(u)=0\end{cases}$ 只有零解.

则原边值问题存在唯一解.

(2)考虑边值问题

$$\begin{cases}-Lu=f(u(x)),x\in I=[a,b],\\ R_1(u)=R_2(u)=0\end{cases}$$

其中 L,R_1,R_2,同(1)中定义,若满足以下条件:

(i) $p(x)\in C^1(I),p(x)>0,q(x)\in C(I),q(x)\leqslant0$;

(ii) $\alpha_1>0,\beta_1\leqslant0,\alpha_1^2+\beta_1^2>0,\alpha_2\geqslant0,\beta_2\geqslant0,\alpha_2^2+\beta_2^2>0$;

(iii) $f(x)\in C(R^+,R^+)(R^+=[0,+\infty)),f(0)=0$;

(iv)相应的奇次边值问题 $\begin{cases}-Lu=0,x\in I=[a,b]\\ R_1(u)=R_2(u)=0\end{cases}$ 只有零解;

(v)存在常数 α,β: $0<\alpha,\beta<1$,使得

$$0<\lim_{u\to+0}\frac{f(u)}{u^\alpha}\leqslant+\infty,0\leqslant\overline{\lim_{u\to+0}}\frac{f(u)}{u^\beta}<+\infty.$$

则原边值问题至少存在一个解 $\varphi(x)$,且 $\varphi(x)>0,\forall x\in(a,b)$.

(3)考虑带参数 λ 的初值问题

$$\begin{cases}-\lambda Lu=f(u(x)),x\in I=[a,b],\\ R_1(u)=R_2(u)=0,\end{cases}$$

其中 L,R_1,R_2 同(1)中定义,若(2)中条件(i)-(iv)满足,且又有

$$(\text{v})'\lim_{u\to+0}\frac{f(u)}{u}=0,\lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u}=0,0<\underline{\lim}_{u\to+\infty}f(u)\leqslant+\infty.$$

则对任意的 $N>0$,存在 $\sigma>0$,使对任意的 λ: $0<\lambda<\sigma$,原边值问题至少存在两个不恒为零的非负解 $\varphi_\lambda^{(1)}(x),\varphi_\lambda^{(2)}(x)$,且 $\max\limits_{x\in[a,b]}\varphi_\lambda^{(1)}(x)>N$.

例 1-42 考虑自治系统

$$\begin{cases}x_1'=f_1(x_1,x_2),\\ x_2'=f_2(x_1,x_2),\end{cases}$$

若在某个 D_1 上存在正(负)定函数 $V(x_1,x_2)$,且它关于该系统对 t 的全导数 $\dot{V}$ 在 D_1 上为常负(正)函数,则该系统零解稳定.

例 1-40 是一阶微分方程初值问题存在唯一性结论,例1-41是二阶微分方程边值问题常用的解的存在性结论,例 1-42 是自治系统零解稳定性的判定结论,以上结论都是从方程本身特点出发,通过对方程本身的性质要求,得解的存在性、唯一性或多解性、非负性、有界性、稳定性等性质.而目前微分方程理论研究的一个重要分支就是对解的性质的讨论,常见思路是通过对实际问题的模型化得微分方程,进而通过解的研究的基本结论及常用技巧(如不动点指数理论、单调迭代技巧等)得解的性质,最后返回应用.定性理论为更好更准确地了解和研究现实世界指明了方向.如

V. Lakshmikantham在“Monotone Iterative Technique for Delay Differential Equations”一文中利用单调迭代方法给出了形如

$$\begin{cases}u'(t)=f(t,u(t),u_t),\\ u_{t_0}=\varphi_0\end{cases}$$

的泛函微分方程解存在的充分条件；翁佩萱、蒋达清在《奇异二阶泛函微分方程边值问题的多重正解》一文中，利用不动点指数理论给出了

$$\begin{cases}y''(x)+r(x)f(y(w(x)))=0,0<x<1,\\ \alpha y(x)-\beta y'(x)=\xi(x),a\leqslant x\leqslant 0,\\ \gamma y(x)+\delta y'(x)=\mu(x),1\leqslant x\leqslant b\end{cases}$$

多重正解的存在性；张凤琴、马知恩等在《带参数的一阶脉冲微分方程边值问题》一文中得到了单边李普希兹条件下，方程

$$\begin{cases}x'(t)=f(t,x(t),\lambda),t\in J,t\neq t_k,\\ Vx(t_K)=I_k(x(t_k),\lambda),k=1,2,\cdots,p,\\ x(0)=x_0,G(x(T),\lambda)=0\end{cases}$$

解的存在性.

例 1-43 证明方程 $x''(t)+px'(t)+qx(t)=f(t)$（其中 p,q 为已知常数）至少有三个线性无关解，且任何解都可以由它们线性表出，且系数之和为 1.

证明 相应奇次线性方程 $x''(t)+px'(t)+qx(t)=0$ 有两个线性无关解，记为 $x_1(t),x_2(t)$. 设原方程一个特解为 $x_0(t)$，则 $x_0(t),x_0(t)+x_1(t),x_0(t)+x_2(t)$ 为原方程的解，且易证三者线性无关.

现考虑方程的任一解 $x(t)$，必存在常数 C_1,C_2，使得

$$x(t)-x_0(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t),$$

所以

$$\begin{aligned}x(t)&=x_0(t)+C_1x_1(t)+C_2x_2(t)\\&=C_1(x_1(t)+x_0(t)),+C_2(x_2(t)+x_0(t))\\&\quad+(1-C_1-C_2)x_0(t).\end{aligned}$$

原结论得证.

例 1-44 设 $x=x_1(t),x=x_2(t)$ 是方程 $x''(t)+x(t)=0$ 分别满足初始条件 $x(0)=0,x'(0)=1$ 和 $x(0)=1,x'(0)=0$ 的解，试不具体求出 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，而直接证明

(i) $\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=x_2(t),\dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t}=-x_1(t)$；

(ii) $x_1^2(t)+x_2^2(t)=1$；

(iii) $x_2(t)$ 有零点；

(iv) 若以 α 表示 $x_2(t)$ 在正半轴上的第一个零点，则 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 都是以 4α 为周期的周期函数.

证明 (i) 因为 $x_1''(t)+x_1(t)=0$，所以 $x_1'''(t)+x_1'(t)=0$. 即 $x_1'(t)$ 也是原方程的解，且满足初始条件 $x_1'(0)=1,x_1''(0)=-x_1(0)=0$. 同理，$x_2'(t)$ 也是原方程的解，且满足初始条件 $x_2'(0)=0,x_2''(0)=-2x_2(0)=-1$. 由解的唯一性知 $x_1''(t)=x_2(t)$，$x_2''(t)=-x_1(t)$. 得证.

(ii) $W(t)=\begin{vmatrix}x_1(t) & x_2(t)\\ x_1' & x_2'(t)\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}x_1(t) & x_2(t)\\ x_2(t) & -x_1(t)\end{vmatrix}=-[x_1^2(t)+x_2^2(t)],$$

由 Liouville 公式知

$$W(t)=W(0)\mathrm{e}^{-\int_0^t 0\mathrm{d}t}=W(0)=-1,$$

即 $\qquad x_1^2(t)+x_2^2(t)=1.$

(iii) 由 (ii) 的结论知 $x_1^2(t)+x_2^2(t)=1$，其几何意义为轨线是圆，故 $x_2(t)$ 必有零点.

(iv) 考虑到 α 是 $x_2(t)$ 在正半轴上的第一个零点，结合 (ii) 的结论，有 $x_1(\alpha)=1$，从而

$$x_1'(\alpha)=x_2(\alpha)=0,x_2'(\alpha)=-x_1(\alpha)=-1.$$

考虑函数 $x_1(t+\alpha)-x_2(t)$,

$$[x_1(t+\alpha)-x_2(t)]''=x_1''(t+\alpha)-x_2''(t)=-[x_1(t+\alpha)-x_2(t)],$$

$$x_1(0+\alpha)-x_2(0)=0,$$

$$x_1'(0+\alpha)-x_2'(0)=0.$$

由解的唯一性知,$x_1(t+\alpha)-x_2(t)\equiv 0$,即 $x_1(t+\alpha)=x_2(t)$,同理可证 $x_2(t+\alpha)=-x_1(t)$,从而

$$x_1(t)=-x_2(t+\alpha)=-x_1(t+2\alpha)=x_2(t+3\alpha)=x_1(t+4\alpha),$$

即 $x_1(t)$以 4α 为周期.同理可证 $x_2(t)$也以 4α 为周期.

在实际问题模型化的过程中,往往需要简化和近似,而且方程中某些系数和相关的初值条件也往往需要测量获得,从而不可避免地存在误差,因此,研究方程定性理论时不应只着眼于一个孤立的方程,而还应考虑包含该方程在内的与之"邻近"的一族方程,从定性分析的角度来讲,即考虑解关于初值及参数的连续依赖性,解的稳定性及分支结构等.

§1.9 数学建模的思想

在利用数学知识解决实际问题时,需要用到数学建模的思想.数学建模即通过调查、收集数据、资料,观察和研究其固有的特征和内在的规律,抓住问题的主要矛盾,运用数学的思想、方法和手段,对实际问题进行抽象和合理假设,创造性地建立起反映实际问题的数量关系,即数学模型,然后运用数学方法辅以计算机等设备对模型加以求解,再返回实际中去解释、分析实际问题,并根据实际问题的反馈结果对数学模型进行验证、修改,并逐步完善,为人们解决实际问题提供科学依据和手段.

常微分方程是与现实生活联系非常密切的一门学科,在该学科学习中渗透数学建模的思想主要体现在两个方面:一是运用常微分方程的基本概念、基本理论和基本方法描述并解释现实现象,

二是将某些数学结论还原为其物理实际,即用现象来解释理论.其中前者是解释实际的需要,后者则是理解理论的一个手段,两者互相促进,又互为前提.

常微分方程建模与一般数学建模的差别在于其中构造的变量往往是连续的,考虑该连续变量的变化率与变量本身及其他变量之间的关系即为常微分方程建模.

例如我们常见的一阶微分方程 $x'(t)=f(t,x(t))$,其意义在于表示某事物 t 时刻的变化率($x'(t)$)依赖于时刻(t)及该时刻的状态($x(t)$),而滞后的微分方程 $x'(t)=f(t,x(t-\tau))$($\tau>0$)表示 t 时刻的变化率($x'(t)$)不仅依赖于时刻(t),还与 $t-\tau$ 时刻的状态 $x(t-\tau)$有关.当然,我们也可以考察更为一般的滞后型泛函微分方程 $x't=f(t,x_t)$,其中 $x_t=x(t+\theta)$,$-r\leqslant\theta\leqslant 0$,该方程表示 t 时刻的变化率($x'(t)$)依赖于时刻(t)及该时刻前推至 $t-\tau$ 时刻这一段时间内的状态.

又如杆的弯曲问题:

$$\begin{cases} y''+\lambda Q(x)y=0, \\ y(0)=0, y(l)=0, \end{cases}$$

其中 $y=y(x)$表示杆的中心轴线,$Q(x)$表示杨氏模数与惯性距乘积的倒数,λ 为压力参数.相应于不同的参数,欲直接求方程相应不同的解比较困难,但若联系物理背景,显然地有:当 λ 比较小时,杆不会弯曲,即边值问题只有零解;当 λ 逐渐增大时,杆会弯曲,即边值问题有非零解.这时,我们尽管不能求出具体解的形式(即杆的弯曲曲线),也不能求出当 λ 具体为何值时才会出现非零解,但毕竟可以从大的方向上检验理论分析的结果,从而在解决某些定性问题时起到事半功倍的效果.

例 1-45　有一表面为旋转曲面的镜子,问当其具有怎样的形状时,才能将所有平行于其轴的射线反射到坐标原点?

解　将旋转轴取为 x 轴,由对称性,光线反射后集中点必在 x

轴上，取该点为坐标原点，如图 1-10 所示.

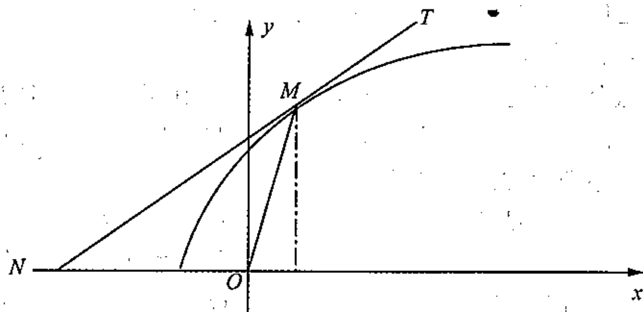


图 1-10

设曲面的母线在 xOy 平面上方程为 $y=f(x)$，在其上任取一点 $M(x,y)$，过点 M 作曲线的切线 NT. 由光的反射定律知 $\angle MNO=\angle NMO$，从而

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\angle MNO=\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}},$$

求其通解为

$$y^2=c(c+2x).$$

这是以原点为焦点的抛物线族，以它的任意一条曲线为母线，绕 x 轴旋转所得的旋转抛物面均可将平行于 x 轴的光线全部反射到焦点上.

例 1-46 设在水平桌面上有一长度为 l 的均匀钢条，在两端施加大小为 $p(>0)$ 而方向相反的一对水平压力，如图 1-11 所示，试分析钢条的弯曲情况.



图 1-11

分析 由生活经验，我们知道，当压力 p 很小时，钢条不会发生弯曲，而当压力逐渐增大并超过某一临界值 p_0 时，钢条则会弯曲.

解 由分析得钢条在 s 点离桌面高度函数 $y=y(s)$ 满足非线性方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}s^2}+\dfrac{py}{B}\sqrt{1-(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s})^2}=0,\\ y(0)=0,y(l)=0.\end{cases}$$

其中 B 表示钢条的刚度. 用线性近似的方法求解，得存在临界压力

$$p_0=(\frac{\pi}{l})^2)B,$$

(1)当 $p<p_0$ 时，钢条不弯曲，而当 $p>p_0$ 时，钢条发生弯曲；

(2)当 $p=p_0$ 时，非零解不唯一，即钢条的弯曲形状不确定；

(3)当 $p>p_0$ 时，钢条不弯曲.

联系力学事实，结论(1)符合实际，而(2)(3)不符合实际，出现这种情况的原因在于线性化方法有一定的局限性.

从广义上来讲，一切实际问题与数学之间联系的桥梁都可以称为数学模型，数学模型化方法(Mathmatical modeling method)要求抓住实际问题的本质，科学地抽象出各个变量间的关系，并用数学语言对其进行描述，然后用数学方法求解，最后将数学解与实际问题相联系给出解释. 其中关键在于找出各变量间的关系，并使得模型尽可能简练.

例 1-47 有一渡轮从江边一点 A 出发要渡过宽为 a 的江，设渡轮在行驶过程中始终对着 A 点正对岸的 B 点航行. 已知水流速为 v_1，渡轮在静水中的速度为 $v_2(v_1<v_2)$. 求该渡轮渡江的运动轨迹方程.

解 取 A 点为坐标原点，取水流方向为 x 轴正向，建立坐标

系. 如图 1-12 所示.

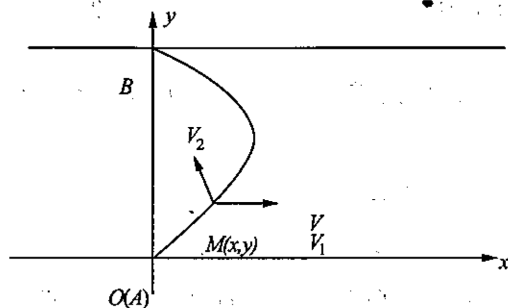


图 1-12

任取轨线 L 上任一点 $M(x,y)$，设在该处速度为

$$v=v_1+v_2,$$

有

$$v_x=v_1-v_2\frac{x}{\sqrt{x^2+(a-y)^2}},\quad v_y=v_2\frac{a-y}{\sqrt{x^2+(a-y)^2}}.$$

又因为 v 的方向即为轨线的切线方程，所以可得原问题的数学模型

$$\begin{cases} y'=\dfrac{v_y}{v_x}=\dfrac{v_2(a-y)}{v_1\sqrt{x^2+(a-y)^2}-v_2x}, \\ y(0)=0, \end{cases}$$

进一步求解得

$$x=\frac{a}{2}\left[\left(\frac{a-y}{a}\right)^{1-\frac{v_1}{v_2}}-\left(\frac{a-y}{a}\right)^{1+\frac{v_1}{v_2}}\right].$$

即为实际运动轨迹.

在应用数学建模的思想求解实际问题时，往往会用到计算机以辅助求解，最常用软件即为 MATLAB. 求解微分方程(组)的解析解用函数 dsolve，用字母 D 表示求微分，D2、D3 表示求二阶、三阶微分，自变量用单引号置于 dsolve 表达式中. 如欲求方程 $\frac{du}{dt}$ 的

通解，应输入命令

dsolve('Du=1+u^2',t'),

运行后显示结果为

ans=tan(t-c1).

若方程中带有定解条件，应用单引号将定解条件置于方程后.

例 1-48　求下列微分方程的特解

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2}+4\dfrac{dy}{dx}+29y=0, \\ y(0)=0,y'(0)=15. \end{cases}$$

解　输入命令

y=dsolve('D2y+4*Dy+29*y=0",y(0)=0,Dy(0)=15",x'),

结果为

y=3*exp(-2*x)*sin(5*x)

当难以求得微分方程的解析解时，可以求其数值解. MATLAB 提供的求微分方程数值解的函数有五个：ode45，ode23，ode113，ode15s，ode23s，不同的函数代表不同的内部计算，如 ode23 表示 $\frac{2}{3}$ 阶的龙格—库塔—费尔贝格算法，一般常用 ode45. 程序具体表述为

[t,x]=solver('f',ts,x0,options)

其中 solver 为所选算法，即上述五个函数之一，f 为由待解方程写成的 M 文件，M，ts=[t0,tf]，t0，tf 为自变量的初值和终值，$x0$ 为函数的初值，options 用于设定误差限(若缺省则表示设定相对误差 10^{-3}，绝对误差 10^{-6})，相应程序为

options=odeset('reltol',rt','abstol',at)

其中 rt，at 分别为设定的相对误差和绝对误差. 需要特别指出的是，高阶微分方程必须首先等价地变换成一阶微分方程组：

例 1-49　求解方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-1000(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x=0,\\ x(0)=0,x'(0)=1.\end{cases}$$

分析 首先需要重新定义两个变量 $y_1=x,y_2=y_1'$，使得微分方程变为一阶微分方程组：

$$\begin{cases}y_1'=y_2,\\ y_2'=1000(1-y_2^1)y_1{}^2-y_1,\\ y_1(0)=0,y_2(0)=1.\end{cases}$$

解 建立 M 文件 vdp1000. m 如下：

```
functiondy=vdp1000(t,y)
dy=zeros(2,1);
dy(1)=y(2);
dy(2)=1000*(1-y(1)^2)*y(2)-y(1);
```

然后输入初值

```
[T,Y]=ode15s('vdp1000',[03000],[20]);
plot(T,Y(:,1),'-');
```

得 x 与 t 的关系如图 1-13 所示.

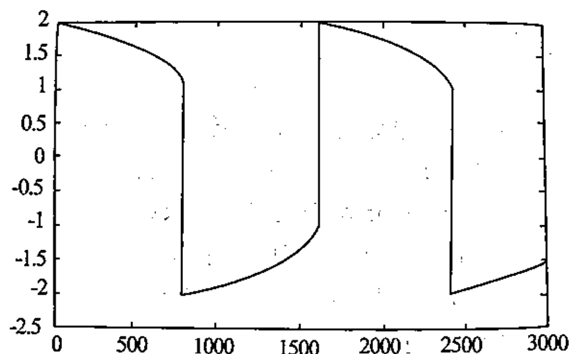


图 1-13

§1.10 不动点的思想

常微分方程解的存在性研究大体上可以分为两个思路：一是基于用近似解逼近精确解的方法证明解的存在性，一般的常微分方程教材都是运用了该思路，这种证明方法的优越性之一在于同时包含了精确解的一个构造方法，从而提供了近似求解的一种途径. 另外一个思路是把解的存在性问题转化为某一映射(变换)的不动点的存在性问题，该方法不能够给出近似求解的途径，但它是更高层次的抽象和概括，所以从应用范围来讲，后者要远广于前者，而且有意识地渗透与应用不动点的思想，可为在泛函分析中系统学习不动点理论奠定良好的基础.

我们常用的不动点结论有：Banach 压缩映象原理(可看作由 Picard 逐次逼近法抽象而得)、Schauder 不动点定理、Krasnoselskii 不动点定理等.

Banach 压缩映象原理 设 D 是 Banach 空间 X 的一个非空闭子集，而 T 是 D 到其自身内的一个映射，它在 D 内满足 Lipschitz 条件，即对任意的 $x,y\in D$，有 $\|Tx-Ty\|\leqslant\alpha\|x-y\|$ $(0\leqslant\alpha<1)$，则必存在唯一的 $x^*\in D$，使得 $Tx^*=x^*$，即 T 在 D 内有唯一的不动点 x^*.

Schauder 不动点定理 设 K 是 Banach 空间 X 的一个有界闭凸集，而 T 是 K 到其自身内的任一全连续映象，则 T 在 D 内至少有一个不动点.

Krasnoselskii 不动点定理 设 K 是 Banach 空间 X 的一个有界闭凸集，而 T 与 S 是映 K 到 X 的两个映象，它们满足下列条件：

(1)对任意的 $x,y\in K$，有 $Tx+Sy\in K$；

(2)T 是一压缩映射，即存在 α：$0\leqslant\alpha<1$，使对任意的 x，

$x' \in K$有

$$\| Tx - Tx' \| \leqslant \alpha \| x - x' \|;$$

(3)S 在 K 上是全连续的.

则映射 $T+S$ 在 K 内至少有一个不动点.

需要特别指出的是,Banach 压缩映象原理是三者中较为简单且应用较广的一个.

例 1-50 若函数 $f(t,x)$在空间 R^{n+1} 中某一区域 $\overline{R}$: $|t-t_0| \leqslant a$, $|x-x_0| \leqslant b$ 上连续,且关于 x 满足 Lipschitz 条件,即存在常数$L>0$,使当(t,x),$(t,\overline{x}) \in \overline{R}$ 时,有

$$|f(t,x)-f(t,\overline{x})| \leqslant L|x-\overline{x}|,$$

则$\begin{cases} \dfrac{dx}{dyt}=f(t,x) \\ x_(t_0)=x_0 \end{cases}$至少在区间$|t-t_0| \leqslant h$ 上存在唯一解. 其中

$$h=\min\{a,\frac{b}{M}\}, M=\max_{(t,x)\in\overline{R}} f(t,x).$$

证明 首先易知$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=f(t,x) \\ x(t_0)=x_0 \end{cases}$求解等价于积分方程 $x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds$ 的求解.

讨论右半区间 I^+ : $t_0 \leqslant t \leqslant t_0+h$.

记 $C[I^+]\{\varphi(t)|\varphi(t)$为 I^+ 上的连续向量函数$\}$,并在其上定义模 $\|\varphi\|=\sup\{|\varphi(t)|e^{-\beta t}, t\in I^+\}$,其中 $\beta>L$ 为常数. 易证$C[I^+]$关于范数 $\|\cdot\|$ 为 Banach 空间.

考虑 $C[I^+]$的子集

$$D=\{x(t)|x(t)\in C[I^+], |x(t)-x_0| \leqslant b\},$$

并在 D 上定义算子 T:

$$Tx=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds, t\in I^+, x\in D.$$

(i)对任意的 $x\in D$,因为$|(Tx)(t)-x_0|=\left|\int_{t_0}^{t}(s,x(s))ds\right| \leqslant Mh \leqslant b, t\in I^+$,故 $T(D)\subset D$.

(ii)对任意的 $x_1, x_2 \in D, t\in I^+$.

$$|(Tx_1)(t)-(Tx_2)(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s,x_1(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(s,x_2(s))ds\right|$$

$$\leqslant L\left|\int_{t_0}^{t} |x_1(s)-x_2(s)|ds\right|$$

$$= L\int_{t_0}^{t} |(x_1(s)-x_2(s)|e^{-\beta s}e^{\beta s}ds$$

$$\leqslant \frac{L}{\beta}\sup_{t\in I^+}\{|x_1(t)-x_2(t)|e^{\beta}\}e^{\beta t},$$

即

$$|(Tx_1)(t)-(Tx_2)(t)|e^{-\beta t} \leqslant \frac{L}{\beta}\sup_{t\in I^+}\{|x_1(t)-x_2(t)|e^{-\beta t}\},$$

即

$$\|Tx_1-Tx_2\| \leqslant \frac{L}{\beta}\|x_1-x_2\|, 0<\frac{L}{\beta}<1.$$

综合(i)(ii),由 Banach 压缩映象原理知,存在唯一的不动点 φ,即 $\varphi=T\varphi$,亦即

$$\varphi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds, t\in I^+.$$

又由 D 的定义知,$\varphi(t)$为 I^+ 上的连续函数.

同理可考虑左半区间 I^- : $t_0-h \leqslant t \leqslant t_0$,此时引入模 $\|\varphi\|=\sup\{|\varphi(t)|e^{\beta}: t\in I^-\}$. 得证.

注 解的存在唯一性定理在大多数常微分方程教材中都是用迭代的方法来证明,该方法也可以用来证明其他很多问题(如 Gronwall 不等式等),只是迭代列的选取有所不同而已. 但从泛函分析的角度来看,各种不同类型的逐次逼近都包含了同样的意义,换言之,以映射的角度看问题,可以从更高的高度,更广的范围来

定义、解决问题. 而该例中若取 $n=1$，即为文献 1 中的解的存在唯一性定理.

例 1-51 (解的存在性定理)

若 $f(t,x)$ 在区域 $\overline{R}$: $|t-t_0|\leqslant a$, $|x-x_0|\leqslant b$ 上连续，则 $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=f(t,x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$ 至少在区间 $[t_0-h,t_0+h]$ 上存在一个解，其中

$$h=\min\{a,\frac{b}{M}\}, M=\sup_{(t,x)\in\overline{R}}f(t,x).$$

证明 记 $I=[t_0-h,t_0+h]$，$C[I]=\{\varphi(t)|\varphi(t)$ 为 I 上的连续函数$\}$，定义 $C[I]$ 上的模 $\|\varphi\|=\sup_{t\in I}|\varphi(t)|$. 易证 $C[I]$ 关于模 $\|\cdot\|$ 为 Banach 空间.

考虑 $C[I]$ 的子集 $K=\{x(t)|x(t)\in C[I], \|x-x_0\|\leqslant Mh\}$，并在 K 上定义算子 T：

$$(Tx)(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,x(s))ds.$$

(i) 证明 K 为凸闭集.

任取 $x_1,\cdots,x_m\in K$，任取 $\lambda_i\geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$，有

$$\|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i-x_0\|=\|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x_i-x_0)\|\leqslant\sum_{i=1}^{m}\lambda_i Mh=Mh.$$

故 $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i(t)\in K$，从而 K 为凸集.

任取 $\{x_i(t)\}\subset K(i=1,2,\cdots)$；且 $x_i(t)\to\overline{x}(t)\in C[I]$，因为 $\|x_i(t)-x_0\|\leqslant Mh$，所以 $\|\overline{x}(t)-x_0\|\leqslant Mh$，即 $\overline{x}(t)\in K$，从而 K 为闭集.

(ii) 证明 $T(K)\subseteq K$.

对任意的 $x(t)\in K$，有

$$|(Tx)(t)-x_0|=|\int_{t_0}^{t}f(s,x(s))ds|\leqslant Mh, t\in I.$$

故 $\|Tx-x_0\|\leqslant MK$，从而 $T(K)\subseteq K$.

(iii) 证明 T 为 K 上的全连续算子.

(a) 对任意的 $\{x_i(t)\}$，$\overline{x}(t)\in K$，且 $x_i(t)\to\overline{x}(t)$，有对任意的 $\varepsilon>0$，存在 N，使当 $i>N$ 时，有

$$|x_i(t)-\overline{x}(t)|\leqslant\|x_i-\overline{x}\|<\varepsilon, \forall t\in I.$$

从而 $\{x_i(t)\}$ 在 I 上一致收敛于 $\overline{x}(t)$.

又 $(Tx_i)(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,x_i(s))ds$，令 $i\to+\infty$，有

$$(Tx_i)(t)\to x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\overline{x}(s))ds=(T\overline{x})(t),$$

从而 T 为 K 上的连续算子.

(b) 对任意的 $x(t)\in K$ 及任意的 $t_1,t_2,\in I$，有

$$|(Tx)(t_1)-(Tx)(t_2)|=|\int_{t_1}^{t_2}f(s,x(s))ds|\leqslant M|t_1-t_2|.$$

所以 $T(K)$ 为等度连续，而 $T(K)$ 一致有界显然，由 Ascoli-Arzela 定理知，$T(K)$ 为相对紧集.

综合 (a)(b) 知，T 为 K 上的全连续算子.

由 Schauder 不动点定理知，存在 $\varphi(t)\in K$ 为 T 的不动点，即

$$\varphi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi(s))ds.$$

得证.

注 在"数形结合的思想"一节中，我们给出了 Euler 折线的几何直观考虑，并由此分析可得较为清晰的证明思路，即逐步迭代逼近的方法. 在这里，我们用 Schauder 不动点定理，从映射的角度完成了证明. 无论是例 1-51 还是例 1-50，都可以直接改变其中的空间维数推广到方程组相应的结论.

第二章　常微分方程中体现的哲学与美学思想

本章中我们主要讨论常微分方程所体现的哲学与美学思想.其中第一节通过对学科基本概念、基本理论和基本方法的深入分析,阐述抽象与具体、主要矛盾与次要矛盾、有限与无限、常量与变量、局部与整体、微分与积分、自变量与应变量等元素在常微分方程中的对立与统一,体现了丰富的哲学思辨的思想;第二节则从统一性、简洁性、对称性及奇异性等方面讨论常微分方程所体现的美学思想.

§2.1　常微分方程中体现的哲学思想

常微分方程是一门与生活实践密切相关的学科,其中体现了丰富的哲学思辨的思想.具体来讲,通过该学科的基本概念、基本理论和基本方法,使得抽象与具体、主要矛盾与次要矛盾、有限与无限、常量与变量、局部与整体、微分与积分、自变量与因变量等诸多方面的元素在常微分方程中实现了对立统一.

一、抽象与具体的对立统一

抽象与具体的对立体现在常微分方程作为高等数学的一个重

要分支必具有高度的抽象性.常微分方程是“联系自变量、未知函数及其导函数且只有一个自变量的关系式”,该定义即从抽象的数学式形式出发,而非以具体问题为导出基础;又如一阶微分方程解的存在唯一性定理只是告诉我们在满足一定条件时解会局部存在唯一,但不能给出解的具体表达式.由此可以看出从该学科的基本概念到基本理论和方法都是抽象的,以至“抽象到只需推理和计算的地步”.另一方面,“和其他所有学科一样,数学是从人们的实际需要产生的”(恩格斯《反杜林论》),常微分方程更不例外,从方程得出的实际模型到方程解的性态对实践的指导作用,都体现出很强的应用性和具体性.举例说明,周期解的研究源于行星或卫星轨道的稳定性问题,n 体问题的研究则源于航海中具体经纬度的计算.

抽象与具体在常微分方程中同时体现出高度的统一性.一方面,“抽象”并不是凭空的、纯思维的,而是“从现实中抽象出来的规律,在一定的发展阶段就和现实世界脱离,并且作为某种好似独立的东西,好似从外面来的规律……而与之相对立”.方程中所有的概念、定理及分析方法都属于“规律”的范畴,其来源即现实世界.同时,“当思维从具体的东西上升到抽象的东西时,它不是离开真理,而是接近真理”,这也就阐明了数学高度抽象的必然性和必要性.另一方面,微分方程的抽象性不仅决定了其逻辑精确性,也决定了其应用对象的广泛性(又称一般性).仍以微分方程概念为例,微分方程是描述自变量、未知函数及其导函数关系的数学式,而函数作为描述变量间关系的概念具有相当的广泛性,这也就决定了“微分方程”描述现实模型的广泛性.微分方程所体现的抽象与具体的统一不仅为方程理论的发展提供了丰厚的土壤,同时也保证了可以将理论的结果真正用诸实践.举一个简单的例子,建筑师往往要考虑垂直梁与水平梁在外加载荷下所成的形状问题,该具体问题刺激了弹性理论的产生和发展,而当抽象的弹性理论较为完

备后，其结果又可以指导更多的与弹性相关的实际问题.

在把握微分方程的抽象与具体的对立统一中还应注意一个问题，类似于具体的分层次，抽象也是分层次的. 一般认为，低层次的抽象相对于高层次的抽象而言是具体的，后者相对于前者则是抽象的.

二、主要矛盾与次要矛盾的对立统一

在对实例进行常微分方程建模的过程中，我们需要寻求各个变量与变量的变化率之间的关系，而变量的确定及变量关系的寻求则需注意分清主要矛盾和次要矛盾. 为简化建模和模型分析，我们往往只抓主要矛盾而忽略次要矛盾的影响，但为了尽量全面地描述实例并将模型的分析结果应用于实践，则需要将更多的关系视为主要矛盾而非次要矛盾.

三、有限与无限的对立统一

有限与无限的对立体现在“有限”作为我们的认知对象是直观的、形象的，而“无限”则是人类直接认知所不可及的，从而在其体现形式和研究方法上必须由严密的理论作支撑. 换言之，简单的将“有限”的方法和理论直接应用至“无限”，可能会导致谬误. 一个非常经典的例子是芝诺提出的阿基里斯悖论，若沿用“有限”的分析方法，则可得“神阿基里斯永远也追不上乌龟”这一显然有悖常理的结论. 那么，有限与无限是不是一点关系也没有呢？也就是说，是不是我们从有限得不到任何有用的信息用于研究无限呢？历史上有一个很有趣的例子，18 世纪上半叶，欧拉将所谓“无限次多项式”类比于有限的 $2n$ 次多项式分解成因式乘积的形式，成功解决了贝努利提出的求自然数倒数平方的级数和问题，结论即为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，该结论经过数值计算直至小数点后 7 位数字都是正

确的，但当时并未给出严格的证明，现在有了微积分学的基本理论，我们可以知道，欧拉的结论之所以正确，是因为该级数恰好是一致收敛的，否则可能会得到正确性迥异的结果. 这个例子从一定的角度说明有限是理解无限的基础，而无限是有限在思维上的跃步拓展，我们可以通过有限并加以适当的理论分析认识无限，同时也可以通过无限的理论认识相当多的有限的趋向. 方程中一个非常重要的结论是解的存在唯一性定理，其证明用到了逐步逼近列的方法. 具体来讲，通过构造 Picard 逼近列 $\{\varphi_n(x)\}$，并对其性质（一致收敛性）进行探讨，进而说明其极限函数 $\varphi(x)$ 即为解，该过程是由有限加一致收敛认识无限；同时，我们可以在一定精度要求下，选取适当的 n，以 $\varphi_n(x)$ 近似表示 $\varphi(x)$，其依据在于可保证当 n 比较大时，有限的 $\varphi_n(x)$ 与其极限函数 $\varphi(x)$ 充分接近，这个过程是通过无限的结果（极限函数为解）认识有限的趋向.

四、常量与变量的对立统一

常量和变量是贯穿整个高等数学的一对概念，多数时候二者表现出严格的对立，即常量描述静态的不变的量，表现形式简单且单一，变量描述动态的变化的量，表现形式往往复杂多样. 同时，很多量又会同时体现常量和变量的特征.

如在 n 阶微分方程的通解 $y=f(x,c_1,\cdots,c_n)$ 中，每取定一个解，$c_1,\cdots,c_n$ 确定，此时，表达式中的 $c_1,\cdots,c_n$ 即看作常量，但在通解表达式中，$c_1,\cdots,c_n$ 均可在一定范围内任意取值，即体现变量的特征. 又如对方程组 $\begin{cases}x'=3x,\\ y'=x+2y,\end{cases}$ 除用特征根法求解外，我们还可以由第一个方程解出 $x=c_1e^{3t}$，然后将其代入第二个方程，得 y 的表达式，在代入的过程中，c_1 当作常量处理，但事实上 c_1 又是在实数范围内任意取值的，即体现为变量.

另一方面，适当取某些量为常量或变量，在解决给定题目中出

现多个变量的问题时，往往会起到事半功倍的效果. 如第一章例1-25，题目中有两个变量 t 和 s，将 s 看作变量，将 t 看作常量，对变量求导可得一微分方程，形式上其中仍含两个变量 t 和 s，再令 s 为常量(0)，t 为变量，(这是因为若仍令 t 为常量，s 为变量，则可约去，得不到微分方程.)得以 t 为自变量的微分方程，再令 t、s 同时为常量($t=s=0$)，可得初值条件 $x(0)=0$，进一步求解即可.

常量与变量的相互利用是常微分方程中常用的方法. 具体来讲，因为常量是静态的，所以可以用常量来刻画变量，达到易于把握性态的目的，譬如在方程通解中任意取定一组 $c_1,\cdots,c_n$，得一个固定的解，对其性态分析显然是比较容易的，而通解从其包含范畴来讲，不外就是当 $c_1,\cdots,c_n$ 在一定范围内变动时解的集合，从而也就得到了所有解(有时针对 $c_1,\cdots,c_n$ 的分情况讨论是部分解)的特征. 同时，因为可以应用分析学的某些工具及指标对变量性态进行探讨，在所得结论中取定变量为某个确定的常量，则可得常量所具有的性质，即用变量研究常量. 该方法往往用于证明某些微分(积分)等式或不等式.

五、局部与整体的对立统一

局部与整体在分析学中往往是作为性质的两个讨论角度，常微分方程也不例外，一个明显的比较是解对初值的连续依赖和解的稳定性. 解对初值的连续依赖即解关于初值连续，换言之，在某个有限过程中，当初始状态变化很小时，相应的解(即系统的运动状态)变化也不会很大；而解的稳定性则是指在无限区间上当初值变化很小时，解变化不会很大. 可以看到，前者是局部的研究角度，而后者则是整体的. 实际生活中，前者保证了系统按照设计的特定运动工作的可能性，而后者则可以保证该系统的长期稳定运行.

另一方面，局部与整体在一定程度上又是统一的. 如解的存在唯一性定理是右端函数在闭矩形区域连续且满足利普希兹条件时

得到解的局部存在唯一连续，即存在唯一解 $y=\varphi(x)$，$x\in[x_0-h,x_0+h]$，$h=\min\{a,\frac{b}{M}\}$，解的延拓定理则是右端函数在有界区域连续且满足局部利普希兹条件时得到解必可延拓至该区域的边界，即在该条件下得解在给定区域上的整体存在唯一性. 显然后者条件弱于前者的条件，那两者结论不同又如何解释呢？事实上，前者结论中 $h=b$ 即解曲线直接到达矩形区域左右边界，而 $h=\frac{b}{M}$ 即解曲线到达矩形区域的上下边界. 换言之，解的局部存在唯一性结论是在一个特殊区域(闭矩形区域)上的整体存在唯一.

六、微分与积分的对立统一

微分方程学科发展初期，人们致力于用初等积分法求一阶微分方程通解，并发展到利用首次积分的方法求解比较简单的高阶微分方程. 当然后来随着认识方程的逐渐增多，人们意识到可以用积分法求解的方程事实上是非常有限的，进而转向其他的研究方向和角度. 但尽管这样，积分法仍然是常微分方程求解的一个重要方法，而积分思想也是该学科中一个重要思想. 微分思想在常微分方程中的体现则主要在于通过微分构造微分方程，从而利用方程的有关性质和结论来解决问题. 二者的对立由定义即可看出，而二者的统一则是指很多情况下我们不是单一地进行微分或进行积分，而是二者交叉进行，如构造方法中的例 1-25，即首先利用微分的思想结合特殊点的值由所给等式得微分方程

$$x'(t)=x'(0)(1+x^2(t)),$$

接下来利用积分的思想结合初值条件得微分方程的解，即 $x(t)$ 的表达式.

七、自变量与因变量的对立统一

自变量与因变量是函数中的一对概念，具体来讲，自变量是影

响因素，因变量是被影响因素，二者从概念上来看是根本对立的，但在实际生活实践中，各因素之间是互相影响互相制约的，所以体现在常微分方程中就是有时候为了实际模型或方程形式的需要，我们可以人为改变自变量与因变量，从而达到易于解决问题的目的. 如方程$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+y^3}$，若将 y 看作 x 的函数，方程不易归类，但若改变自变量与因变量，将 x 看作 y 的函数，得$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}+y^2$，为一阶非齐次线性微分方程，可用常数变易法求解.

八、其他

哲学思辨的思想在常微分方程中还有其他方面的体现，如形式与内容、特殊与一般、近似与精确等，所有这些方面的矛盾一方面为方程学科的发展提出了新的问题，并刺激学科向某个方向发展，另一方面也为理论结果的真理性验证提供了丰厚的土壤.

§2.2 常微分方程中体现的美学思想

常微分方程作为一门基础性自然科学，可以反映客观世界的运行及发展规律，从而必然会体现出客观世界所呈现的美学特点. 现代数学美学原始思想源于庞加莱—阿达玛的发明心理学. 一个人关于数学美学的素养，有助于激发其学习数学的兴趣. 常微分方程所体现的数学美表现在它的统一性、简洁性、对称性及奇异性.

统一性在大学数学中体现是非常明显的，如“映射”统一了代数中的“运算”、几何中的“变换”、分析中的“函数”等概念，欧氏空间则囊括了 n 维向量空间、连续函数空间、n 维加权向量空间等常见空间. 统一性在常微分方程中主要体现在方程形式及求解方法上. 譬如以向量形式给出的一阶微分方程 $x'=A(t)x+f(t)$ 统一

了一阶线性微分方程、一阶线性微分方程组和高阶线性微分方程，而且进一步，可以就该形式给出解的存在唯一性结论及解的延拓定理. 同样地，有了积分因子法，我们就可以用恰当方程的解法统一求解变量分离方程及一阶线性微分方程等，事实上，对于变量分离方程$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$，可以找到积分因子 $\mu=\frac{1}{g(y)}$；而对于线性方程$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)$，可以找到积分因子 $\mu=e^{-\int P(x)dx}$.

简洁美源于自然规律的简洁性，而数学的任务之一也正是用最简洁的语言来描述和解释客观世界. 如牛顿在开普勒行星运动定律的基础上运用数学方法证明宇宙万有引力现象可归结为“反平方定律”；爱因斯坦提出的质能转化公式 $E=mc^2$. 又如纯数学中的代数学基本定理：在复数范围内，n 次多项式必有 n 个根；分析学的结论 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ 等. 具体到常微分方程，简洁美则主要体现在基本理论及解的形式上. 如一阶微分方程 $x'=f(t,x)$ 解的存在性结论，其条件只需要右端项 $f(t,x)$ 连续；考虑 n 阶线性微分方程的通解，只需已知相应齐次线性微分方程的 n 个线性无关解及原方程本身的一个特解即可；设 $x_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 是齐次线性微分方程 $x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=0$ 的任意 n 个解，它们所构成的 Wronski 行列式记为 $W(t)$，则 $W(t)$ 满足简单的一阶微分方程 $W'+a_1(t)W=0$.

微分方程的对称美包含了几何直观的对称性和内在的对称性. 前者主要体现在积分曲线的对称性，如微分方程 $4x^2y'^2-y^2=xy^3$，其积分曲线关于坐标原点(0,0)成中心对称的曲线也是该方程的积分曲线. 后者则主要体现在函数中各个变量的对称性、运算中解的对称性等，如若 $f(x,y,z)$ 为可微的 n 次齐次函数，则必满足 $xf_x+yf_y+zf_z=nf$，这里 f 所体现的齐次性也是一种广泛意

义上的对称性;又如函数 $xy+yz+zx$ 所体现的是其中三个变量的地位对等性,也就是对称性.对称性在偏微分方程中的体现尤其明显,如我们常见的几类方程:

波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})=f(x,y,z,t)$

热传导方程 $\frac{\partial u}{\partial t}-a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})=f(x,y,z,t)$

泊松方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x,y,z)$

都体现出明显的对称性,而且进一步地,这种方程形式上的对称性必然会导致其解的对称性,反映到实际模型,则体现为变化过程中的对称性.

奇异美是指我们用数学作为工具,可以解释很多现实生活中看起来很奇怪很玄妙的现象.如 Kermack 等人在研究 20 世纪初印度孟买发生的一次瘟疫时,发现其实际数据符合一条曲线,该曲线可以用 SIR 模型来解释;气象学家 Lorenz 在 20 世纪 60 年代以大气对流现象为变量研究天气变化时发现方程对初值的敏感依赖性,而对简化后的该方程研究(即解对初值的异常敏感性)导致了一个新分支——混沌(chaos)的出现.奇异性在数学的其他学科中也有直观而明显的体现.如在抛硬币试验中,如果次数相当多,则正反面向上的次数比例会越来越接近 1,这种现象可以用概率学理论来解释.Cantor 集是人为找出的一个特殊集合,其特殊之处在于:(i)无处稠密,(ii)势为 C,(iii)测度为 0,(iv)自相似性,(v)相似维数 $D_c=\frac{\ln 2}{\ln 3}$,而这里所体现的自相似特性推动了分形理论的发展.由以上例子可以看到,现实世界中的很多"奇异"的现象可以在数学中找到合理的解释,而寻找这些合理解释的过程往往会推动一些新学科或新分支的发展,进一步地,理论上的突破、创新与完善又可以用来解释其他相关现象,甚至预测某些现象的发生.一

个广为人知的例子是海王星的发现,1846 年,勒未累通过对微分方程的数值分析预测了海王星的存在性,并确定了海王星在天空中的位置,因而海王星又常被称为"笔尖上的行星".

第三章　常微分方程学习和研究中的主要方法

本章联系常微分方程学习与教学，提出了本学科学习和研究中体现较为重要和深刻的几类方法. 其中“慎思和明辨的态度”一节指出方程学习中要善于提出问题，善于解决问题，并构建自己的知识体系；“善于分类”一节对常微分方程的学习内容作了简单而系统的梳理，总结了常见的方程类型、讨论角度及其基本解决思路和常用方法；“相互联系的方法”一节分别从该学科知识内在联系和方程与其他学科的联系两方面强调相互联系方法的重要性；“重视概念的方法”一节介绍了常微分方程中概念学习的主要方法，即：具体材料铺垫、多角度分析、注重本质；“归纳・猜测・验证”是一类研究的方法，该节小题目即给出新课题研究三部曲，并以实例来说明如何进行归纳、猜测、验证.

§3.1　慎思和明辨的态度

《礼记・中庸》第十九章提到：“博学之，审问之，慎思之，明辨之，笃行之”，讲的是为学的几个层次. 作为一门自然科学的学习也应有同样的态度，这里我们仅讲慎思和明辨. 具体到常微分方程的学习，即要求我们对所学的基本理论和方法有一种“思”“辨”之后的认知，而不是简单的有一学一、有一说一. 再细致些来讲，就是要

带着问题学习，学完之后善于提出问题，当然提出之后还要主动寻求答案. 譬如有结论是充分条件，那我们可以考虑高条件是否可以降低，如果可以，又可以降低至什么样的程度；有条件是必要条件，那我们对其作怎样的加强可得充要条件. 另一方面，所有教材都是由浅及深、循序渐进地介绍知识点，我们除对其作理解后的接受外，还要主动思考每个知识点之间的联系，换言之，“联系”不只是学习结束后的总结，更是主动探向未知的触角.

举一个简单的例子，我们在学习 n 阶奇次线性微分方程解的结构时，首先给出了叠加原理，即“若 $x_1(t),\cdots,x_m(t)$ 为 n 阶奇次线性微分方程的解，则 $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t)$ 也是该方程的解”，那么，如果令 $m=n$，$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t)$ 可否表示方程的通解呢？显然这要求 $c_1,\cdots,c_n$ 互相独立，形象地讲，就是 $c_1,\cdots,c_n$ 不能互相函数表出，也不能够互相消掉，而要保证这一点，需要 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$ 之中的任何一个都不能用其他函数线性表出，即这 n 个解需线性无关. 结论叙述为“若 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$ 为 n 阶奇次线性微分方程的 n 个线性无关解，则方程通解可表为 $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t)$”. 而有了这个结论之后，我们还需要进一步提问：线性相关与线性无关有没有较为实用的判别方法？能否找到 n 阶奇次线性微分方程的 n 个线性无关解？方程除 $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t)$ 之外有无其他形式的解？这些问题引导我们对奇次线性微分方程解的结构作更深入的探讨，同时对教材编者的思路和意图有更明确的把握.

又如在学习高阶常系数非奇次线性微分方程解法时，一个很简单且实用的方法是比较系数法，该方法针对非奇次项为多项式、指数函数和弦函数乘积形式的方程非常有效. 其原因在于初等函

数中，有且仅有这几类函数(包括乘积)求任意阶导数之后仍具有完全相同的形式. 搞清楚这一点，在具体求解方程时就可以做到"因题制宜"，有的放矢.

作为整门学科的学习，如此多问，并积极寻求答案，不仅有助于我们更好的把握具体结论的"因"与"果"和学科基本的理论脉络，还可以培养我们善于提出问题、善于分析问题、善于解决问题的习惯和能力.

例 3-1 举例说明一阶微分方程解的存在唯一性定理中的利普希兹条件并非必要条件.

解 考虑方程

$$\frac{dx}{dt}=\begin{cases}0, & x=0,\\ x\ln|x|, & x\neq 0,\end{cases}$$

方程有解：(1)$x\equiv 0$，(2)$x=e^{e^t}$，$x>0$ (3)$x=-e^{e^t}$，$x<0$. 且显然三者互不相交.

考虑相应初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\begin{cases}0, & x=0,\\ x\ln|x|, & x\neq 0,\end{cases}\\ x(t_0)=0,\end{cases}$$

可证存在唯一解 $x(t)\equiv 0$.

另一方面，$|f(t,x)-f(t,0)|=|x\|\ln x\|$，因为$\lim\limits_{x\to 0}|\ln|x\|=\infty$，所以不存在 $N>0$，使得$|f(t,x)-f(t,0)|\leqslant N|x|$. 即初值问题中方程右端函数在 $x=0$ 邻域内不满足利普希兹条件，但解仍存在唯一，从而连续加利普希兹条件为解存在唯一的充分非必要条件.

分析 在应用该定理证明方程解的存在唯一性时，我们往往用加强的条件，即 $f(x,y)$在$[x_0-a,x_0+a]\times[y_0-b,y_0+b]$上连续，关于 y 的偏导数存在且连续. 通过该例可以看到，即使是一般较难验证的利普希兹条件也非必要，从而加强后的更非必要. 这样的分析可以引导我们作进一步的思考，即是否可以找到更弱的

条件.

例 3-2 举例说明一阶微分方程解的存在唯一性定理中仅有连续条件不能保证解的唯一性.

解 考虑初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x^{\frac{2}{3}},\\ x(0)=0,\end{cases}$$

方程右端函数处处连续，但该问题存在两个互异解：(1)$x\equiv 0$，(2)$x=t^3$ 即仅有连续条件可以保证解的存在性(Peano 定理)，但不可以保证解的唯一性.

注：Peano 定理在右端项连续条件下得到了$\dfrac{dy}{dx}=F(x,y)$解的存在性结论，但该定理不保证解的唯一. 事实上，早在 20 世纪 30 年代，苏联数学家拉甫仑捷夫曾在矩形区域内构造了连续的 $F(x,y)$，使$\dfrac{dy}{dx}=F(x,y)$在 R 内经过任一点至少有两条不同的积分曲线.

例 3-3 试解释常微分方程中"奇次方程"与"奇次线性方程"中的"奇次"有何不同.

解 奇次方程源于奇次函数. 若二元函数 f 对任意的 t，满足 $f(tx,ty)=t^k f(x,y)$，则称 f 为 k 次奇次函数，对一般的一阶常微分方程 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$，若其中 P,Q 为同次奇次函数，则称该方程为奇次方程. 此时，

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}=-\frac{P(1,\frac{y}{x})}{Q(1,\frac{y}{x})}=f(\frac{y}{x}).$$

奇次线性微分方程则指形如

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+L+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$$

的方程,即除未知函数及其各阶导函数的线性项外再无其他项.

在学习中保持慎思和明辨的态度,可以更大程度上将课本的知识内化为自己的体系,换言之,我们不要被动的接受式的学习,而是要主动的研究式的学习.从一个新的课题(常常表现为新的章节)提出伊始,就需要考虑:①所提课题有无理论或现实意义;②应该怎样将原有知识与该课题相联系,进而达到解决问题的目的.有的教材和教辅就很好地体现了这一点,每一节后都有几个问题是针对该节基本概念和基本理论的理解,意在让学生通过自己的认知体系来描述看似枯燥无趣的定义定理,并通过易混淆的问题帮助同学们搞清楚其内在联系.我们可以在常微分方程学习中应用类似的方法和思路,尝试用自己的语言描述自己对知识点和知识体系的理解,并在该过程中提出问题,解决问题.

§3.2 善于分类的方法

大学本(专)科阶段所学《常微分方程》中并未涉及方程的分类,这是一个需要较多专业知识的方向.我们这里所讲的善于分类是指要善于根据所给问题进行分门别类,而这个判断问题所属类型的过程往往也就暗示了其求解方法的类型.同时,我们还要善于扩大一类问题的内涵,达到融会贯通的目的.《论语·述而》中讲:"举一隅不以三隅反,则不复也",也就是这个道理.

具体到常微分方程学科,可以掌握以下几点:

对于能求解的方程类型,主要是掌握其求解方法.一般来讲,常系数线性微分方程与方程组均能求解,线性变系数高阶微分方程与方程组即非线性方程与方程组能直接求解的则很少.对于可求解的微分方程,常用的方法有初等积分法、常数变易法、欧拉指数法、比较系数法、拉普拉斯变换法、变量代换法等.其中初等积分法用于变量可分离的微分方程,常数变易法用于求解非齐次线性

微分方程及方程组,欧拉指数法用于求解高阶常系数齐次线性微分方程,比较系数法用于确定非齐次项为多项式函数、三角函数、指数函数及其乘积形式的常系数非齐次线性微分方程的一个特解,拉普拉斯变换法则适用于求解常系数线性微分方程或方程组初值问题.从以上分析可知:要求解所给方程,一般是先判断方程所属类型,进而根据类型选择适当的方法.需要说明的是,很多时候方程类型不易直接判断,而需通过一定的转化方可.如李卡蒂方程$\frac{dy}{dx}=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$不属于以上任何一种可解的类型,但我们只需找到方程的一个特解 $y_0(x_0)$,并作变换 $y=z+y_0$,方程就变为伯努利方程,再次经过变量变换可得线性微分方程,即化为可解的形式.

对于一般的微分方程,要掌握其解的基本性质及讨论方法.从性质来讲,常微分方程中主要涉及初值问题解的存在唯一性、解对初值或参数的连续依赖性、解的估计、奇点的分类与判别、周期解与极限环的存在性与判别、解的稳定性等.从所用方法上来讲,主要用到了逐次逼近法、微分积分不等式法、定性分析法、V 函数法.其中逐次逼近法通过构造一致收敛的函数列来讨论解的存在性,同时也给出了一定精度要求下一阶微分方程及方程组初值问题求近似解的基本思路;微分积分不等式法主要用于解的估计;定性分析法是 19 世纪由法国数学家庞加莱提出的,主要用于奇点、极限环与平面图貌的讨论;V 函数法由俄国数学家李亚普诺夫提出,基本思路是通过构造的 V 函数及其全导数的性质来判断不能或不易直接讨论的方程解的稳定性问题.这些方法的共同点在于根据方程的特点而不是具体求解来判断解的性质.

§ 3.3 相互联系的方法

相互联系的方法即在学习过程中不是一个又一个知识点的简单堆砌，而是在每学过一部分内容后像串珠子一样将该部分连接于该学科已内化但尚未完善的知识体系，即将各部分有机地内化与结合.在这个过程中，不仅可以实现各知识点的更深一步理解，还可以有助于相关知识体系的构建.

在用初等积分法求解微分方程部分，教材上介绍了很多方法，分别针对变量分离方程、齐次方程及可以化为齐次方程的形式、线性方程、恰当方程等，但各种方法综合后发现最终都是为了化为可以积分的形式，而实现的过程则是用到了不同类型的变量变换.再如一般教材都是先介绍高阶线性微分方程，再介绍一阶线性微分方程组，但对于前者，均可以做变换后化为后者的形式.事实上，对

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=f(t),$$

令 $x_1=x,x_2=x',\cdots,x_n=x^{(n-1)}$，有

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{n-1}\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&\dots0\\0&0&1&\dots0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\dots1\\-a_1(t)&-a_2(t)&-a_3(t)&\dots-a_n(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{n-1}\\x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\f(t)\end{pmatrix}$$

从此可以看出，n 阶线性微分方程可以作为一阶线性微分方程组的特殊情况，而且由形式出发，可以得到一阶线性微分方程组解的存在唯一性、解的基本结构等基本理论会包含 n 阶线性微分方程的相关结论，即两者体现出由形式到内容的统一.再如在解的线性相关(线性无关)性判定中，有一个重要工具是朗斯基行列式，该行列式针对 n 阶线性微分方程的定义为：若 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$是方程的解，则称

$$W(t)=\begin{vmatrix}x_1(t)&x_2(t)&\cdots&x_n(t)\\x_1'(t)&x_2'(t)&\cdots&x_n'(t)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{(n-1)}(t)&x_2^{(n-1)}(t)&\cdots&x_n^{(n-1)}(t)\end{vmatrix}$$

为 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$的朗斯基行列式；而对于 $x'=A(t)x+f(t)$的定义为：若 $x_1(t),\cdots,x_{n(t)}$为上述方程组的解，则称

$$W(t)=\det[x_1(t),\cdots,x_n(t)]$$

为 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$的朗斯基行列式.从形式上来看，二者是不同的，前者是纯量函数组各阶导函数构成的行列式，后者则是向量函数构成的矩阵相应的行列式，但在方程转化为方程组的过程中，所作变换为

$$x=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x(t)\\x'(t)\\\vdots\\x^{(n-1)}(t)\end{pmatrix},$$

变换后方程组的 n 个解为

$$x_i(t)=\begin{pmatrix}x_i(t)\\x_i'(t)\\\vdots\\x_i^{(n-1)}(t)\end{pmatrix},i=1,2,\cdots,n.$$

则相应的朗斯基行列式为

$$W(t)=\det[x_1(t),\cdots,x_n(t)]=\begin{vmatrix}x_1(t)&x_2(t)&\dots&x_n(t)\\x_1'(t)&x_2'(t)&\dots&x_n'(t)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_2^{(n-1)}(t)&x_2^{(n-1)}(t)&\dots&x_n^{(n-1)}(t)\end{vmatrix}.$$

从此我们可以看到，两次定义的朗斯基行列式是一致的，而前者不过是后者的特殊情况.

联系和统一的方法不仅是一门学科各知识点的联系与统一，

而且还有该学科与其他学科之间的联系. 常微分方程作为一门分析类学科,与之联系最为密切的是数学分析,无论是基本理论的推导,还是具体的运算过程,都离不开数学分析做为工具. 下举两例说明:

一阶微分方程解的存在唯一性定理是常微分方程中一个重要的基本结论,其解决思路是构造一致收敛的 Picard 列,该函数列的极限函数即为要求的解,一致收敛的作用在于保证求积分与求极限顺序的可交换性,该结论即为数学分析中级数理论的内容. 再以刘维尔公式为例,结论为:对于方程组 $x'=A(t)x$,其任意 n 个解 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$ 所构成的朗斯基行列式 $W(t)$ 必满足

$$W'(t)+[a_{11}(t)+a_{22}(t)+\cdots+a_{nn}(t)]W(t)=0,\ \forall t\in[a,b],$$

其中 $a_{ii}(t)$ 为 $A(t)$ 的对角线元素. 在该公式的证明中需对 $W(t)$ 求导,但一般形式的行列式函数直接求导是不现实的,这时需要用到数学分析中的复合函数求导方法,即引进中间变量 $b_{ij}=x_{ij}(t)$,将 W 看作以 $b_{11},b_{12},\cdots,b_{nn}$ 为中间变量,以 t 为真正自变量的函数,并应用复合函数求导公式,得

$$W'(t)=\begin{vmatrix} x'_{11}(t) & \cdots & x'_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x'_{n1}(t) & \cdots & x'_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

再由 $x_i(t)$ 是原方程组的解,代入可得要证的结论.

常微分方程还与高等代数、解析几何等课程紧密相关,与前者的联系主要体现在方程组的基本理论部分,即以矩阵、向量表示方程和方程的解,与解析几何的联系则主要体现在两个方面:一是微分方程来源于现实问题,而在描述一些几何问题时也往往会得到微分方程,如“求曲线,使其上任一点的切线与该点的径向夹角相等”等,此类问题也包含一些与生产实践紧密相关的几何体设计问题,如飞行器设计、镜面设计等,当然,这些问题在模型化为微分方

程的过程中往往用到光学、力学等知识. 二是微分方程描述的是自变量、函数及其导函数之间的关系,方程求解即求适当的函数使其满足给定的关系,而表示函数的一个重要工具即为几何的方法,所以我们可以从几何的角度出发,探究方程解的性态,如奇解、稳定性、极限环等.

§3.4　重视概念的学习

概念是人们对事物本质的认识,是逻辑思维方的最基本单元和形式. 人们对于真理的认识,即是在一系列概念的形成中,在概念的不断更替和运动中,在一个概念向另一个概念的转化中实现的. 作为常微分方程的学习,也必然会遵循这一规律. 重视概念的学习,是常微分方程学习中的重要环节.

概念最基本的特征是它的抽象性和概括性. 举个例子,我们知道,微分方程是紧随微积分理论的产生而产生的,在微积分理论中有一个非常重要的概念,即极限. 人类在认识无限事物的趋向时形成了模糊的、感性的极限定义;这种直观定义渐渐不可以继续满足数学理论发展的要求. 后来,牛顿和莱布尼茨分别在几何直观基础上给出了极限的描述性定义,这种定义比较容易被人们所接受,但仍没有定量地给出两个无限过程之间的联系,故不可以作为分析理论的逻辑基础. 19 世纪,维尔斯特拉斯提出了极限的 $\varepsilon-N$ 定义,即用 ε 和 N 两个变量来刻画两个无限趋近的过程. 在 $\varepsilon-N$ 定义中,将本来“极限”这一定性的问题用 ε 和 N 两个定量的指标来描述,自此,$\varepsilon-N$ 定义称为极限判定的通用准则,而微积分理论也有了坚实的理论基础.

在常微分方程中重视概念的学习,可以从以下几个方面来把握:

首先,抽象概念的学习需要具体材料作铺垫. 换言之,通过形

象的方式进行分析、综合、比较,是理解概念的有效途径.如常微分方程这一概念,即由一个自变量、未知函数及未知函数的导数(或微分)组成的关系式,可以举例如下:

$$x'(t)+x^2(t)=\sin t\cdot e^t,$$

内含一个自变量 t,未知函数 $x(t)$ 及未知函数的导数 $x'(t)$,故为常微分方程;$2x^2(t)+x(t)=\sin t$,其中有自变量 t 和未知函数 $x(t)$,但并无未知函数的导数或微分,故不是常微分方程;$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial t}$,其中尽管含有未知函数 u 及其导函数,但其中有两个自变量 x 和 t,故不是常微分方程,事实上,这类方程称为偏微分方程.再如奇点的概念,可举例如下:

对于常微分方程 $\frac{dx}{dt}=f(t,x)$,奇点即使得 $f(t,x)=0$ 的点,此时 $\frac{dx}{dt}=0$,体现为在该点处向量场的方向不确定.

其次,对概念的把握可以变换角度,多方说明,常用的方法有文字说明和图像说明两种.如解的稳定性和渐近稳定概念:

$\frac{dx}{dt}=f(t,x)$ 零解稳定是指对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,对任意的 x_0:$\|x_0\|<\delta$,$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=f(t,x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$ 的解 $x(t)$ 满足 $\|x(t)\|<\varepsilon$, $\forall t\geqslant t_0$;零解渐近稳定则指在稳定基础上又存在 $\delta>0$,使当 $\|x_0\|<\delta_0$ 时,$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=f(t,x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$ 的解 $x(t)$ 满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$.以上是两个概念的文字表述,其图像说明可见第一章图 1-2.文字描述和图像说明各有优点,所以应用时往往有所侧重,前者的特点在于其理论的严密性,故主要用于判断、证明(往往是正面的结论);后者

的主要特点是其直观性和形象性,故主要用于比较或否定性判定.事实上,无论是在常微分方程还是在大学数学的其他分科中,对于概念的描述和学习往往是以上两种方法综合运用的.

最后,对于概念的把握一定要突出其本质特征.举一个简单的例子,$F(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n})=0$ 的通解是指含有 n 个独立的任意常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的解 $y=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$,其中最本质的特征是"独立",即表达式中的 n 个任意取值的常数不可以互相影响(否则至少一个 c_i 可用其他表出),也不可以互相消掉.

常微分方程中有很多概念,这些概念或者直接指出了常微分方程及其解的外在特点,或者作为一个刻画指标描述方程及其解的性质.在常微分方程中重视和加强概念的学习,不仅可以加深对概念本身的理解,更有助于由点及线地构建起自己的知识体系.

§3.5　归纳·猜测·验证

严格来讲,"归纳·猜测·验证"三部曲并不是一种学习的方法,而是一种研究的方法.对于高等院校的学生而言,学习并非只意味着被动地接受知识,而更在于研究式学习思维的培养和发展,所以我们在各门功课的学习中就应该有意识地强化这种理念.具体来讲,要求我们带着问题学习,由已知的相关知识归纳猜测该问题的结论,然后进行理论验证.当然,现有教材及教辅用书出于体系的完整性和系统性要求,都会循序渐进、环环相扣地给出由简到繁的结论,但在这些结论的发现过程中,"猜测"发挥了重要的作用.高斯曾称他的许多结果就是利用归纳法猜到的,而"证明只是补行手续而已".举个例子,已知导数的物理原型是瞬时速度,与其紧密相关的一个物理概念是平均速度,由二者的关系,我们可以得到拉格朗日中值定理的物理描述雏形;再如著名的费马大定理,即

$x^n+y^n=z^n(n\in N,n>2)$在自然数中无解，该定理由费马在 17 世纪提出，但直到 1993 年才得到了证明. 还有一些猜测经过大量的数据论证是正确的，但至今无法给出严密的理论证明，如哥德巴赫猜想等. 需要说明的是，无论这些猜想是否已经得证，对其进行逐步深入研究的过程都会在不同程度上推动该学科的发展.

例 3-4 试讨论阶非齐次线性微分方程

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=0$$

的线性无关解的个数，并证明之.

分析 已知非齐次线性微分方程通解为

$$x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+\cdots+C_nx_n(t)+\bar{x}(t).$$

其中 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$为相应齐次线性微分方程的任意 n 个线性无关解，$\bar{x}(t)$为非齐次线性微分方程本身的任一特解. 易证 $\bar{x}(t)$，$x_1(t)+\bar{x}(t),\cdots,x_n(t)+\bar{x}(t)$为原方程的 $n+1$ 个线性无关解，所以不妨猜测其线性无关解的个数即为 $n+1$ 个. 下证明之.

证明 首先证明方程存在 $n+1$ 个线性无关解.

如上记 $x_1(t),\cdots,x_n(t),\bar{x}(t)$，则 $\bar{x}(t),x_1(t),+\bar{x}(t),\cdots,x_n(t)$必线性无关. 否则，存在不全为 0 的常数 $k_0,k_1,\cdots,k_n$，使得

$$k_0\bar{x}(t)+k_1[x_1(t)+\bar{x}(t)]+\cdots+k_n[x_n(t)+\bar{x}(t)]=0,$$

即

$$k_1x_1(t)+\cdots+k_nx_n(t)+(k_0+k_1+\cdots+k_n)\bar{x}(t)=0.$$

首先，$\sum\limits_{i=0}^{n}k_i=0$，否则，有 $\bar{x}(t)=-\dfrac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n}k_i}\sum\limits_{j=1}^{n}k_jx_j$ 为齐次线性方程的解，矛盾. 又因为 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$线性无关，所以 $k_1=\cdots=k_n=0$，从而又有 $k_0=0$，与假设相矛盾.

接下来证明只有 $n+1$ 个线性无关解.

假设有 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_{n+1}(t),x_{n+2}(t)$为原方程的解且线性无关，则 $x_1(t)-x_{n+2}(t),x_2(t)-x_{n+2}(t),\cdots,x_{n+1}(t)-x_{n+2}(t)$

为相应齐次线性方程的解，且同样线性无关. 事实上，若线性相关，则存在 $k_1,k_2,\cdots,k_{n+1}$不全为 0，使得

$$k_1[x_1(t)-x_{n+2}(t)]+k_2[x_2(t)-x_{n+2}(t)]+\cdots$$
$$+k_{n+1}[x_{n+1}(t)-x_{n+2}(t)]=0.$$

即

$$k_1x_1(t)+k_2x_2(t)+\cdots+k_{n+1}x_{n+1}(t)-(k_1+\cdots+\cdots k_{n+1})x_{n+2}(t)=0,$$

则 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_{n+1}(t),x_{n+2}(t)$线性相关，矛盾.

又因为 n 阶齐次线性微分方程线性无关解的个数为 n，矛盾.

综上所述，n 阶非齐次线性微分方程线性无关解有且仅有 $n+1$ 个.

例 3-5 讨论 n 阶齐次线性微分方程的任意两个基本解组的朗斯基行列式之间的关系.

分析 用刘维尔公式易知齐次线性方程的任意 n 个解所构成的朗斯基行列式 $W(t)$满足方程

$$W'(t)+a_1(t)W(t)=0.$$

由已知，$W(t)\neq0$，此时求解上述方程有

$$W(t)=Ce^{-\int a_1(t)dt}(C\neq0).$$

又任意两个基本解组的朗斯基行列式即为上述方程的任意两个解，易看出两者相差一个不为零的常数因子.

证明 设方程一基本解组为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，其朗斯基行列式相应的矩阵记为 $\varphi(t)$. 设方程另一基本解组为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，其朗斯基行列式相应的矩阵记为 $\varphi(t)$. 则

$$\varphi(t)=\varphi(t)C,$$

其中 C 为常数矩阵，且 $\det C\neq0$，从而

$$\det\varphi(t)=\det\varphi(t)\cdot\det C.$$

所以两个基本解组的朗斯基行列式之间相差一个不为零的常数因子.

需要特别指出的是，由归纳所得的猜测性结论因为只能源于不完全归纳，所以必须对猜测的结论加以严密的理论证明. 同时，因为“猜测”是一种以直觉为基础的非逻辑形态思维，所以较之传统的思维方式更能培养我们的创新意识，提高创新能力.

第四章　常微分方程中常用的解题方法

在本章中，我们总结了常微分方程中常用的几类解题方法，具体包括变量分离的方法、常数变易的方法、积分因子的方法、待定系数与系数函数的方法、特征方程与特征根法、参数的方法、升阶的方法、降阶的方法等. 这些方法大部分是比较常规的但却又是行之有效的方法，在应用时，我们应该根据具体题目选择不同的方法.

§4.1　变量分离的方法

一阶常微分方程求解有两个重要方法：一是变量分离的方法，二是全微分方程及积分因子的方法. 其中前者是通过适当的变形及变换，将自变量、自变量的微分和因变量、因变量的微分分别置于方程的两端，然后分别进行积分即可得方程通解；后者则是寻求适当的积分因子，将方程化为通解的恰当微分方程，进一步得通解.

可化为变量分离方程的类型包括齐次微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g(\frac{y}{x})$，形如$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$的方程等.

例 4-1 求方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$的通解.

解 $y=0$是解;若$y\neq 0$,分离变量,得$\frac{\mathrm{d}y}{y}=2x\mathrm{d}x$,两端分别积分,得$\ln|y|=x^2+c$.所以原方程通解为$y=ce^{x^2}(c\in R)$.

例 4-2 求解方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$.

解 令$\frac{y}{x}=u$,则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$,代入原方程,得$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\tan u$,$\tan u=0$是解,$\tan u\neq 0$时,分离变量,得$\cot u\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$,分别积分,有$\ln|\sin u|=\ln|x|+c$,整理,得通解$\sin u=cx(c\in R)$,代入原变量,得原方程通解$\sin\frac{y}{x}=cx(c\in R)$.

例 4-3 求方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2x-y+1}{x-2y+1}$的通解.

解 令$\begin{cases}2x-y+1=0,\\x-2y+1=0,\end{cases}$

得
$$\begin{cases}x=-\frac{1}{3},\\y=\frac{1}{3}.\end{cases}$$

作变换$\begin{cases}X=x+\frac{1}{3},\\Y=y-\frac{1}{3},\end{cases}$则原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{2X-Y}{X-2Y}=\frac{2-\frac{Y}{X}}{1-2\frac{Y}{X}}.$$

令$\frac{Y}{X}=u$,得

$$X\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}+u=\frac{2-u}{1-2u}.$$

分离变量,可得其通解$u^2-u+1=cX^{-1}$,代回原变量,并整理,得原方程通解

$$x^2+y^2-xy+x-y=c(c\in R).$$

例 4-4 求解方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2x^3+3xy^2+x}{3x^2y+2y^3-y}$.

解 原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}=\frac{y\mathrm{d}y}{x\mathrm{d}x}=\frac{2x^2+3y^2+1}{3x^2+2y^2-1},$$

令$y^2=Y,x^2=X$,得

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{2X+3Y+1}{3X+2Y-1}.$$

同例 4-3,进行两次变量变换得变量分离方程,求其解,并代回原变量,得原方程通解为

$$(y^2-x^2+2)^5=c(x^2+y^2)(c\in R).$$

§ 4.2 常数变易的方法

本书第一章中已经讲到,常数变易的思想是常微分方程学科所特有的一种思想,是连接非齐次线性微分方程(组)与相应齐次线性微分方程(组)的桥梁.利用常数变易,可将求解未知函数$x(t)$(或向量函数$X(t)$)转化为求解未知函数$c(t)$(或向量函数$C(t)$).常数变易法是求解非齐次线性微分方程(组)的一种重要而特别的方法.

例 4-5 求解方程$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-x=\cos t$.

解 相应齐次线性微分方程通解为

$$x(t)=c_1e^t+c_2e^{-t},$$

常数变易知,原方程通解形如

$$x(t)=c_1(t)\mathrm{e}^t+c_2(t)\mathrm{e}^{-t},$$

代入原方程,得

$$\begin{cases}c_1{}'(t)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\cos t,\\ c_2{}'(t)=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{t}\cos t,\end{cases}$$

求解,得

$$\begin{cases}c_1(t)=-\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}\cos t+\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}\sin t+k_1,\\ c_2(t)=-\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{t}\cos t-\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}\sin t+k_2,\end{cases}$$

所以原方程通解为

$$x(t)=c_1\mathrm{e}^t+c_2\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{2}\cos t.$$

例 4-6 求方程组 $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}0\\\mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix}$ 满足初始条件 $X(0)=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 的解.

解 首先求得相应齐次方程组 $\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ 的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(c_1+c_2t)\mathrm{e}^{2t}\\c_2\mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix},$$

现用常数变易法求原方程组的特解. 设

$$\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}=c_1(t)\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{2t}\\0\end{pmatrix}+c_2(t)\begin{pmatrix}t\mathrm{e}^{2t}\\\mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix},$$

代入原方程组,得 $\begin{pmatrix}c_1'\\c_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t\\1\end{pmatrix}$,解得

$$\begin{pmatrix}c_1(t)\\c_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{t^2}{2}+c_1\\t+c_2\end{pmatrix},$$

所以原方程组通解为

$$\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{2t}\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}t\mathrm{e}^{2t}\\\mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{t^2}{2}\mathrm{e}^{2t}\\t\mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix}.$$

代入初始条件,解得 $c_1=1,c_2=-1$,

从而所求特解为

$$\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{t^2}{2}\mathrm{e}^{2t}-t\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{2t}\\t\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix}.$$

§ 4.3 积分因子的方法

形如 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 的一阶微分方程,因为其中 x 和 y 的地位对等性,所以较之于一阶微分方程的常见形式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$ 更具有一般性,故在求解方法上也更具有一般性. 若在该方程中有 $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$,则存在 $u(x,y)$,使得 $\mathrm{d}u(x,y)=M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y$,此时,该方程称为恰当微分方程,其通解为 $u(x,y)=C$. 当然大部分的方程并不是恰当微分方程,但我们可以寻求与其同解的恰当微分方程,即可以寻求积分因子 $\mu(x,y)$,使得同解方程 $\mu M\mathrm{d}x+\mu N\mathrm{d}y=0$ 为恰当微分方程. 积分因子的方法为求解一般的一阶微分方程提供了一种全新的思路.

积分因子的方法从本质上来讲是一种化归的方法,即将非恰当方程化归为恰当微分方程. 一般形式的积分因子不易求得,但我们可以从方程特点出发,寻求具有特殊形式的积分因子.

结论 1 存在只与 x 有关的积分因子

$$\mu(x)\Leftrightarrow \frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\varphi(x).$$

证明 $\mu(x)$ 为积分因子 $\Leftrightarrow \frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}\Leftrightarrow N\frac{d\mu}{dx}=(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})\mu\Leftrightarrow \frac{d\mu}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx$ 只与 x 有关.

例 4-7 用积分因子法求解一阶线性方程 $\frac{dy}{x}=P(x)y+Q(x)$.

解 原方程可写为

$$[P(x)y+Q(x)]dx-dy=0,$$

其中 $M=P(x)y+Q(x),N=-1$,所以 $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=-P(x)$ 只与 x 有关. 可寻求积分因子 $\mu(x)$,使得

$$\frac{d\mu}{\mu}=-P(x)dx,$$

积分,得

$$\mu(x)=e^{-\int P(x)dx}.$$

与原方程通解的恰当微分方程为

$$P(x)ye^{-\int P(x)dx}dx+Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx-e^{-\int P(x)dx}dy=0,$$

求其通解为

$$ye^{-\int P(x)dx}-\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx=c,$$

即

$$y=(c+\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx)e^{\int P(x)dx}.$$

结论 2 存在只与 y 有关的积分因子 $\mu(y)\Leftrightarrow \frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\Psi(y)$.

例 4-8 求解方程 $ydx+(y-x)dy=0$.

解 $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=-\frac{2}{y}$ 只与 y 有关,

所以可寻求形如 $\mu(y)$ 的积分因子,代入,得 $\mu(y)=\frac{1}{y^2}$,故与原方程同解的恰当方程为

$$\frac{1}{y}dx+\frac{1}{y}dy-\frac{x}{y^2}dy=0,$$

求其通解为

$$\frac{x}{y}+\ln|y|=c.$$

结论 3 存在形如 $\mu(\varphi(x,y))$ 的积分因子

$\mu(y)\Leftrightarrow \frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial\varphi}{\partial x}-M\frac{\partial\varphi}{\partial y}}$ 仅是 $\varphi(x,y)$ 的函数.

证明 若 $\mu=\mu(\varphi(x,y))$ 为积分因子,则

$$\mu(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})=-(M\frac{\partial\mu}{\partial y}-N\frac{\partial\mu}{\partial x}),$$

又因为

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{d\mu}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y},\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{d\mu}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

所以

$$\mu(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})=-(M\frac{\partial\varphi}{\partial y}-N\frac{\partial\varphi}{\partial x})\frac{d\mu}{d\varphi}.$$

即

$$\frac{\frac{d\mu}{d\varphi}}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial \varphi}{\partial x}-M\frac{\partial \varphi}{\partial y}}.$$

若左端仅为 φ 的函数,则右端也必仅为 φ 的函数,

$\Leftarrow$ 同以上推理,若右端仅为 φ 的函数,则左端也必仅为 φ 的函数.

例 4-9 求方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 有如下形式积分因子的充要条件.

(1)$\mu(x\pm y)$　　(2)$\mu(xy)$

(3)$\mu(\frac{y}{x})$　　(4)$\mu(x^2\pm y^2)$

(5)$\mu(x^\alpha y^\beta)$ (α,β 为常数)

解 (1) 取 $\varphi=x\pm y$,此时$\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\pm 1,\frac{\partial \varphi}{\partial x}=1$,

所以充要条件为$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\mp M}$为 $x\pm y$ 的函数.

(2) 取 $\varphi=xy$,此时$\frac{\partial \varphi}{\partial y}=x,\frac{\partial \varphi}{\partial x}=y$,

所以充要条件为$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{yN-xM}$为 xy 的函数.

(3) 取 $\varphi=\frac{y}{x}$,此时$\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{1}{x},\frac{\partial \varphi}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}$,

所以充要条件为$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-\frac{y}{x^2}N-\frac{1}{x}M}$为$\frac{y}{x}$的函数.

(4) 取 $\varphi=x^2\pm y^2$,此时$\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\pm 2y,\frac{\partial \varphi}{\partial x}=2x$,

所以充要条件为$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{2xN\mp 2yM}$为 $x^2\pm y^2$ 的函数.

(5) 取 $\varphi=x^\alpha y^\beta$,此时$\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\beta x^\alpha y^{\beta-1},\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\alpha x^{\alpha-1}y^\beta$,

所以充要条件为$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{\alpha x^{\alpha-1}y^\beta N-\beta x^\alpha y^{\beta-1}M}$为 $x^\alpha y^\beta$ 的函数.

应用积分因子法求解微分方程时,我们往往需要对方程中出现的和进行分项组合,然后每一部分分别应用以上结论,得每一部分的积分因子,进一步得原函数,然后利用每一部分的积分因子和原函数进行组合得各部分公共的积分因子,并可求原方程的原函数.

例 4-10 用积分因子法求解方程

$$(3xy^2-2y)dx+(x^2y^2+x)dy=0.$$

解 原方程可化为

$$(3xy^2dx+x^2y^2dy)-(2ydx-xdy)=0,$$

记 $M_1=3xy^2,N_1=x^2y^2,M_2=2y,N_2=-x$,则

$$\frac{\frac{\partial M_1}{\partial y}-\frac{\partial N_1}{\partial x}}{N_1}=\frac{7}{x}$$

只与 x 有关,可求得相应的积分因子为 $\mu_1(x)=x^7$,相应原函数为

$$u_1(x,y)=\frac{1}{3}x^9y^3.$$

$\frac{\frac{\partial M_2}{\partial y}-\frac{\partial N_2}{\partial x}}{N_2}=-\frac{3}{x}$ 只与 x 有关,可求得相应的积分因子为 $\mu_2(x)=x^{-3}$,相应原函数为

$$u_2(x,y)=-x^{-2}y.$$

取 $\varphi_1(u_1)=u_1^{-\frac{7}{3}},\varphi_2(u_2)=(\frac{1}{3})^{-\frac{2}{3}}u_2^{-2}$,则

$$\mu(x,y)=\mu_1\varphi_1(u_1)=\mu_2\varphi_2(u_2)=(\frac{1}{3})^{-\frac{2}{3}}xy^{-2},$$

可得与原方程同解的微分方程

$$xy^{-2}(3xy^2-2y)\mathrm{d}x+xy^{-2}(x^2y^2+x)\mathrm{d}y=0.$$

求其通解为 $u(x,y)=x^3y-x^2y^{-1}=c$，该式即为原方程的通解.

例 4-11 用积分因子法求解方程

$$(5xy-3y^3)\mathrm{d}x+(3x^2-7xy^2)\mathrm{d}y=0.$$

解 原方程可写为

$$(5xy\mathrm{d}x+3x^2\mathrm{d}y)-(3y^3\mathrm{d}x+7xy^2\mathrm{d}y)=0,$$

记 $M_1=5xy, N_2=3x^2, M_2=3y^3, N_2=7xy^2$，则

$\dfrac{\frac{\partial M_1}{\partial y}-\frac{\partial N_1}{\partial x}}{N_1}=-\dfrac{1}{3x}$ 只与 x 有关，可求得相应的积分因子为 $\mu_1(x)=x^{-\frac{1}{3}}$，相应原函数为

$$u_1(x,y)=3x^{\frac{5}{3}}y.$$

$\dfrac{\frac{\partial M_2}{\partial y}-\frac{\partial N_2}{\partial x}}{-M_2}=-\dfrac{2}{3y}$ 只与 y 有关，可求得相应的积分因子为 $\mu_2(y)=y^{-\frac{2}{3}}$，相应原函数为

$$u_2(x,y)=3xy^{\frac{7}{3}}.$$

取 $\varphi_1(u_1)=u_1^{\frac{1}{2}}, \varphi_2(u_2)=u_2^{\frac{1}{2}}$，则

$$\mu(x,y)=\mu_1u_1^{\frac{1}{2}}=\mu_2u_2^{\frac{1}{2}}=(3xy)^{\frac{1}{2}},$$

可得与原方程同解的微分方程

$$(5\cdot3^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}-3^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{7}{2}})\mathrm{d}x+(3^{\frac{3}{2}}x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{1}{2}}-7\cdot3^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{5}{2}})\mathrm{d}y=0,$$

求其通解为 $x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{7}{2}}=c$，该式即为原方程的通解.

在具体应用积分因子法求解微分方程时，除寻求特殊形式积分因子和分项组合外，我们往往还利用直观观察的方法，即在对原方程进行简单变形的基础上，判断方程类型并求解.

例 4-12 分别求变量分离方程、齐次方程、Bernoulli 方程的积分因子.

解 (1) 对变量分离方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$，两边同乘 $\dfrac{1}{g(y)}$，得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x$，该方程为恰当微分方程，所以原方程有积分因子 $\dfrac{1}{g(y)}$.

(2) 对齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(\dfrac{y}{x})$，令 $u=\dfrac{y}{x}$，则方程化为

$$x\mathrm{d}u+[u-f(u)]\mathrm{d}x=0,$$

即 $\dfrac{\mathrm{d}u}{u-f(u)}=-\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，该方程为变量分离方程且为恰当方程，代回原变量，得

$$\frac{\mathrm{d}(\frac{y}{x})}{\frac{y}{x}-f(\frac{y}{x})}=-\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

即
$$\frac{\mathrm{d}y}{xf(\frac{y}{x})-y}=\frac{f(\frac{y}{x})\mathrm{d}x}{xf(\frac{y}{x})-y}.$$

所以原方程有积分因子

$$xf(\frac{y}{x})-y.$$

(3) 对 Bernoulli 方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y+q(x)y^n$，两边同乘 y^{-n}，得

$y^{-n}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y^{1-n}+q(x)$，

即
$$\frac{\mathrm{d}y^{1-n}}{\mathrm{d}x}=(1-n)p(x)y^{1-n}+(1-n)q(x),$$

可求其积分因子为 $\mathrm{e}^{(n-1)\int P(x)\mathrm{d}x}$，以该积分因子乘方程两端，得恰当

方程

$$\mathrm{d}[y^{1-n}\mathrm{e}^{(n-1)\int P(x)\mathrm{d}x}]-(1-n)q(x)\mathrm{e}^{(n-1)\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=0.$$

所以 Bernoulli 方程的积分因子为 $y^{-n}\mathrm{e}^{(n-1)\int P(x)\mathrm{d}x}$.

例 4-13 若 $\mu(x,y)$ 为 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 的积分因子，从而可求得可微函数 $u(x,y)$，使得 $\mathrm{d}u=\mu M\mathrm{d}x+\mu N\mathrm{d}y$. 求证 $\overline{\mu}=\mu\varphi(u)$ 也是该方程的积分因子，其中 $\varphi(u)$ 为 u 的任意可微函数.

证明 因为 $\mu M\mathrm{d}x+\mu N\mathrm{d}y=0$,

所以 $\varphi(u)[\mu M\mathrm{d}x+\mu N\mathrm{d}y]=0$,

又因为 $\mathrm{d}u=\mu M\mathrm{d}x+\mu N\mathrm{d}y$,

所以 $\varphi(u)\mathrm{d}u=\varphi(u)\mu M\mathrm{d}x+\varphi(u)\mu N\mathrm{d}y=\mu\varphi(u)(M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y)$.

记 $\Phi(u)$ 为 $\varphi(u)$ 的一个原函数，则 $\mathrm{d}\Phi(u)=\varphi(u)\mathrm{d}u=\mu\varphi(u)(M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y)$，从而 $\overline{\mu}=\mu\varphi(u)$ 也是原方程的积分因子.

例 4-13 说明在应用积分因子法求解微分方程时，所求得的积分因子是不唯一的. 如方程 $y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$，可按结论 2 求其只与 y 有关的积分因子 $\mu=\frac{1}{y^2}$，进一步求得 $\frac{1}{y^2}(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)$ 的一个原函数 $\frac{x}{y}$，再由例 4-13 的结论知，对任意可微函数 φ，$\frac{1}{y^2}\varphi(\frac{x}{y})$ 都是原方程的积分因子.

§4.4 待定系数及系数函数的方法

待定系数及系数函数的方法是大学数学分析类学科中应用较为广泛的一种方法. 在常微分方程中，该方法主要体现在已利用定性分析、解的结构或其他方法确定了解的形式，但其中具体系数未定，这时我们往往将形式解代入微分方程，进一步求得系数或系数函数. 应用该方法的关键在于确定解的形式.

例 4-14 求解方程 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-x=\cos t$.

解 相应齐次线性方程的特征根为 $\lambda\pm1$，因为 i 不是特征根，所以可寻找形如 $\overline{x}(t)=A\cos t+B\sin t$ 的特解，代入原方程，得 $-2A\cos t-2B\sin t=\cos t$，解得 $A=-\frac{1}{2}$，$B=0$，

所以 $\overline{x}(t)=-\frac{1}{2}\cos t$,

从而原方程通解为

$$x(t)=c_1\mathrm{e}^t+c_2\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{2}\cos t.$$

例 4-15 求解方程 $(t^2-1)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-6x=0$.

解 设特解形如 $\overline{x}(t)=at^3+bt^2+ct+d$，代入原方程，得 $b=0$，$d=0$，$a=-c$. 所以 $\overline{x}(t)=t^3-t$ 为原方程的一个特解. 令 $x=u(t^3-t)$，代入原方程，得

$$t(t^2-1)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+2(3t^2-1)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=0.$$

令 $z=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$，得

$$t(t^2-1)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+2(3t^2-1)z=0,$$

求解，得 $z=\frac{1}{t^2(t^2-1)^2}$，即 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{t^2(t^2-1)^2}$.

求解，得 $u=-\frac{1}{t}-\frac{t}{2(t^2-1)}+\frac{3}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|$.

所以原方程通解为

$$x(t)=c_1(t^3-t)+c_2\left[4-6t^2+3(t^2-t)\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\right].$$

例 4-16 设 $x_1(t)\neq0$ 是二阶齐次线性微分方程 $x''+a_1(t)x'+a_2(t)x=0$ 的解，其中 $a_1(t)$，$a_2(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 求

证：

(1)$x_2(t)$ 为方程的解的充要条件是

$$W'[x_1,x_2]+a_1W[x_1,x_2]=0.$$

(2) 方程的通解可表为 $x=x_1[c_1\int\frac{1}{x_1^2}\mathrm{e}^{-\int a_1(s)\mathrm{d}s}\cdot\mathrm{d}t+c_2]$,其中 c_1,c_2 为任意常数,$t_0,t\in[a,b]$.

证明 ⇒ $W[x_1,x_2]=\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ x_1' & x_2'\end{vmatrix}$,

$$W'[x_1,x_2]=\begin{vmatrix}x_1' & x_2'\\ x_1' & x_2'\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ x_1'' & x_2''\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ x_1'' & x_2''\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ -a_1x_1'-a_2x_1 & -a_1x_2'-a_2x_2\end{vmatrix},$$

所以 $W'[x_1,x_2]+a_1W[x_1,x_2]=0.$

⇐ $W'[x_1,x_2]+a_1W[x_1,x_2]$

$$=\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ x_1'' & x_2''\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ x_1' & x_2'\end{vmatrix}$$

$$=x_1x_2''-x_1''x_2+a_1(x_1x_2'-x_1'x_2)$$

$$=-x_2(x_1''+a_1x_1')+x_1(x_2''+a_1x_2')$$

$$=-x_2(x_1''+a_1x_1'+a_2x_1)+x_1(x_2''+a_1x_2'+a_2x_2)$$

$$=0.$$

因为 $x_1(t)\neq 0$ 是方程的解,所以

$$x_2''+a_1x_2'+a_2x_2=0,$$

即 $x_2(t)$ 也是方程的解.

(2) 因为解 $x_1(t),x_2(t)$ 线性无关 ⇔ $W[x_1,x_2]\neq 0$,结合结论(1)知:

$$W(t)=\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ x_1' & x_2'\end{vmatrix}=x_1x_2'-x_1'x_2=\mathrm{e}\int_{t_0}^{t}a_1(s)\mathrm{d}s.$$

该方程为关于 $x_2(t)$ 的一阶非齐次线性微分方程,可利用常

数变易法求其形如 $x_2(t)=c(t)x_1(t)$ 的解,
代入原方程,得

$$c'(t)=\frac{1}{x_1^2}\mathrm{e}\int_{t_0}^{t}a_1(s)\mathrm{d}s,$$

所以

$$c(t)=\int\frac{1}{x_1^2}\mathrm{e}\int_{t_0}^{t}a_1(s)\mathrm{d}s,$$

从而

$$x_2(t)=x_1\int\frac{1}{x_1^2}\mathrm{e}\int_{t_0}^{t}a_1(s)\mathrm{d}s.$$

故原方程通解形如

$$x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)=c_1x_1+c_{21}\int\frac{1}{x_1{}^2}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}a_1(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t.$$

例 4-17　求解方程 $(3t^3+t)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-6tx=4-12t^2$,已知方程的两个解 $x_1(t)=2t,x_2(t)=(1+t)^2$.

解　易证 $\bar{x}(t)=t^2+1$ 相应齐次线性方程的一个特解,
令 $x(t)=(t^2+1)z$,并代入相应齐次线性方程,得

$$(3t^3+t)(t^2+1)\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}+2(6t^4+3t^2+1)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=0.$$

令 $y=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$,得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\frac{2(6t^2+3t^2+1)}{(3t^3+t)(t^2+1)}y,$$

求解,得

$$y=c_1\frac{3t^2+1}{t^2(t^2+1)^2},$$

即 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=c_1\frac{3t^2+1}{t^2(t^2+1)^2}$,求解,得

$$z = -c_1 \frac{1}{t(t^2+1)} + c_2.$$

所以原方程的通解为

$$x = c_1 \frac{1}{t} + c_2(t^2+1) + 2t.$$

例 4-18 求解 $4t^2 \frac{d^2x}{dt^2} + 4t\frac{dx}{dt} - (1+4t^2)x = 4t^{\frac{3}{2}}e^t$，已知相应齐次线性方程解为 $x_1 = \frac{e^t}{\sqrt{t}}, x_2 = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$.

解 设原方程解形如 $x(t) = c_1(t) \frac{e^t}{\sqrt{t}} + c_2(t)\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$，代入求得

$$c_1(t) = \frac{1}{2}t + c_1, c_2(t) = -\frac{1}{4}e^{2t} + c_2,$$

所以原方程解形如

$$x(t) = c_1 \frac{e^t}{\sqrt{t}} + c_2 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2}e^t(\sqrt{t} - \frac{1}{2\sqrt{t}}).$$

例 4-19 求 $\frac{d^3x}{dt^3} + tx = 0$ 的级数解.

解 设方程解为 $x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$，代入方程，得

$\sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)c_k t^{k-3} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+1} = 0$，所以有 $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot c_3 = 0$

$$(k+3)(k+2)(k+1)c_{k+3} + c_{k-1} = 0 (k = 1,2,\cdots)$$

从而 $c_3 = 0$,

$$c_{k+3} = -\frac{c_{k-1}}{(k+3)(k+2)(k+1)} (k = 1,2,\cdots),$$

即 $c_{4k} = (-1)^k \frac{(4k-3)(4k-7)\cdots 5 \cdot 1}{(4k)!} c_0,$

$$c_{4k+1} = (-1)^k \frac{(4k-2)(4k-6)\cdots 6 \cdot 2}{(4k+1)!} c_1,$$

$$c_{4k+2} = (-1)^k \frac{(4k-1)(4k-5)\cdots 7 \cdot 3}{(4k+2)!} c_2,$$

$$c_{4k+3} = (-1)^k \frac{4k(4k-4)\cdots 8 \cdot 4}{(4k+3)!} c_3.$$

易求满足初值条件

$$x(0) = 1, \frac{dx(0)}{dt} = 0, \frac{dx^2}{dt^2} = 0 (c_0 = 1, c_1 = 0, c_2 = 0),$$

$$x(0) = 0, \frac{dx(0)}{dt} = 1, \frac{dx^2(0)}{dt^2} = 0 (c_0 = 0, c_1 = 1, c_2 = 0),$$

$$x(0) = 0, \frac{dx(0)}{dt} = 0, \frac{dx^2(0)}{dt^2} = 1 (c_0 = 0, c_1 = 0, c_2 = 1)$$

的特解

$$x_1(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(4k-3)(4k-7)\cdots 5 \cdot 1}{(4k)!} t^{4k},$$

$$x_2(t) = t + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(4k-2)(4k-6)\cdots 6 \cdot 2}{(4k+1)!} t^{4k+1},$$

$$x_3(t) = t^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(4k-1)(4k-5)\cdots 7 \cdot 3}{(4k+2)!} t^{4k+2}.$$

显然它们是线性无关的，因此方程通解可表示为

$x(t) = A_1 x_1(t) + A_2 x_2(t) + A_3 x_3(t)$ (A_1, A_2, A_3 为任意常数).

例 4-20 求 $t^2 \frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt}$ 的级数解.

解 设解为 $x(t) = t^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+\alpha}$，代入原方程，得

$$t\sum_{k=0}^{\infty}(k+\alpha)(k+\alpha-1)c_k t^{k+\alpha-2} + 4\sum_{k=0}^{\infty}(k+\alpha)c_k t^{k+\alpha-1} + t\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+\alpha} = 0,$$

整理，得 $(\alpha^2 + 3\alpha)c_0 t^{\alpha-1} + [(1+\alpha)^2 + 3(1+\alpha)]c_1 t^\alpha$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \{[(k+\alpha)^2 + 3(k+\alpha)]c_k + c_{k-2}\} t^{k+\alpha-1} = 0,$$

故 $(\alpha^2 + 3\alpha)c_0 = 0,$

$$[(1+\alpha)^2+3(1+\alpha)]c_1=0;$$

$$[(k+\alpha)^2+3(k+\alpha)]c_k+c_{k-2}(k=2,3,\cdots).$$

由 $\alpha^2+3\alpha=0$ 得 $\alpha=0$ 或 $\alpha=-3$，

当 $\alpha=-3$ 时，有 $c_1=0$，且 $k(k-3)c_k=-c_{k-2}(k=2,3,\cdots)$，

所以 $c_{2k+2}=(-1)^k\dfrac{2k+1}{(2k+2)!}c_0(k=0,1,\cdots)$，

$$x_1(t)=\frac{1}{t^3}\Big[c_0+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2k+1}{(2k+2)!}c_0t^{2k+2}\Big].$$

当 $\alpha=0$ 时，有 $c_1=0$，且 $k(k+3)c_k=-c_{k-2}(k=2,3,\cdots)$，

所以 $c_{2k}=-\dfrac{c_{2k-2}}{(2k+3)2k}$

$$=(-1)^k\frac{3c_0}{(2k+3)!!(2k)!!}(k=1,2,\cdots),$$

$$x_2(t)=c_0+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{3c_0}{(2k+3)!!(2k)!!}t^{2k}.$$

显然 $x_1(t),x_2(t)$ 线性无关，因此方程通解为：

$x(t)=A_1x_1(t)+A_2x_2(t)$（其中 A_1,A_2 为任意常数）.

§4.5 特征方程与特征根法

特征方程与特征根法是求解常系数线性齐次微分方程最常用的一种方法．它是将微分方程问题转化为代数方程（即相应的特征方程）问题，然后求其根（即特征根），最后根据根的情况写出相应的基本解组，进一步得通解．

应用特征方程与特征根法求解方程时，需注意根的具体情况，如 λ 为 k 重实根，则对应 k 个解 $e^{\lambda t},te^{\lambda t},\cdots,t^{k-1}e^{\lambda t}$，又若 k 重根 $\lambda=\alpha+i\beta$ 为虚数，则 λ 与 $\bar{\lambda}$ 一起对应 $2k$ 个解 $e^{\alpha t}\cos\beta t,e^{\alpha t}\sin\beta t,te^{\alpha t}\cos\beta t,te^{\alpha t}\sin\beta t,\cdots,t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t,t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t$.

例 4-21　求 $x^{(4)}-4x=0$ 的通解．

解　特征方程为 $\lambda^4-4\lambda=0$，求得特征根为 $\lambda_1=\sqrt{2},\lambda_2=-\sqrt{2},\lambda_3=\sqrt{2}i,\lambda_4=-\sqrt{2}i$，相应特解为 $x_1(t)=e^{\sqrt{2}t},x_2(t)=e^{-\sqrt{2}t}$，$x_3(t)=\cos\sqrt{2}t,x_4(t)=\sin\sqrt{2}t$，所以原方程通解为

$$x(t)=c_1e^{\sqrt{2}t}+c_2e^{-\sqrt{2}t}+c_3\cos\sqrt{2}t+c_4\sin\sqrt{2}t.$$

例 4-22　求解微分方程初值问题 $\begin{cases}x''(t)+4x'(t)+4x=0,\\x(2)=4,\\x'(2)=0.\end{cases}$

解　先求微分方程通解：

特征方程为 $\lambda^2+4\lambda+4=0$，求得特征根为 $\lambda=-2$（二重），所以原方程通解为 $x(t)=c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}$，代入初值条件，并求解得 $c_1=-12e^4,c_2=3e^4$，所以原问题解为

$$x(t)=-12e^4e^{-2t}+8e^4te^{-2t}.$$

例 4-23　求证方程组 $X'=AX$ 有以 $\omega(\omega\neq0)$ 为周期的周期解的充要条件是系数矩阵 A 至少有一个形如 $i\dfrac{2\pi\mu}{\omega}$（μ 为整数）的特征根．

证明　$\Leftarrow$ 因为 A 有形如 $i\dfrac{2\pi\mu}{\omega}$ 的特征根，所以方程组有形如 $e^{i\frac{2\pi\mu}{\omega}t}$ 的解，又因为 $e^{i\frac{2\pi\mu}{\omega}(t+\omega)}=e^{i\frac{2\pi\mu}{\omega}t}$，且 $\dfrac{de^{i\frac{2\pi\mu}{\omega}(t+\omega)}}{dt}=\dfrac{de^{i\frac{2\pi\mu}{\omega}(t+\omega)}}{d(t+\omega)}=Ae^{i\frac{2\pi\mu}{\omega}(t+\omega)}$，所以 $e^{i\frac{2\pi\mu}{\omega}(t+\omega)}$ 也是方程组的解，故方程组有以 ω 为周期的周期解．

$\Rightarrow$ 因为方程组有以 ω 为周期的周期解，所以 A 的特征根必为虚数，即方程组有形如 $e^{i\lambda t}$ 的解，且满足 $e^{i\lambda(t+\omega)}=e^{i\lambda t}$，所以 $e^{i\lambda\omega}=1$，从而 $\lambda\omega=2\pi\mu$，即 $\lambda=\dfrac{2\pi\mu}{\omega}$，故 A 有形如 $i\dfrac{2\pi\mu}{\omega}$ 的特征根．

例 4-24　求解方程

$$(1+t)^2\frac{d^2x}{dt^2}+(1+t)\frac{dx}{dt}+x=4\cos\ln(1+t).$$

解 令 $\ln(1+t)=s$,则 $\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{ds}e^{-s}$,$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2x}{ds^2}e^{-2s}-\frac{dx}{ds}e^{-2s}$,

所以原方程化为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=4\cos s \qquad (*).$$

相应齐次线性方程的特征方程为 $\lambda^2+1=0$,求得特征根为 $\lambda=\pm i$,进一步求得相应线性齐次方程通解为

$$x(s)=c_1\cos s+c_2\sin s,$$

用常数变易法或比较系数法求得(*)式的通解为

$$x(s)=c_1\cos s+c_2\sin s+2s\sin s,$$

代回原变量,得原方程的通解

$$x(s)=c_1\cos\ln(1+t)+c_2\sin\ln(1+t)+2\ln(1+t)\sin\ln(1+t).$$

例 4-25 求解方程组 $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=4x-3y+\sin t,\\ \frac{dy}{dt}=2x-y-2\cos t,\end{cases}$

解 首先求解相应齐次线性方程组 $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=4x-3y,\\ \frac{dy}{dt}=2x-y,\end{cases}$

特征方程为 $\begin{vmatrix}4-\lambda & -3\\ 2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)=0$,求得特征根为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$.

求对应 $\lambda_1=1$ 的特征向量

$$\begin{bmatrix}3 & -3\\ 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},$$

求对应 $\lambda_2=2$ 的特征向量

$$\begin{bmatrix}2 & -3\\ 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix},$$

所以相应齐次线性方程通解为

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}e^t+c_2\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}e^{2t},$$

应用常数变易法得原方程通解为

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}e^t+c_2\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}e^{2t}+\begin{bmatrix}\cos t-2\sin t\\ 2\cos t-2\sin t\end{bmatrix}.$$

以上我们举例说明了特征方程与特征根法在求解常系数线性方程(组)中的应用,但事实上,这种方法也可以应用于变系数线性方程,其本质是通过函数变换,实现对变系数非齐次线性方程的降阶.

对于二阶变系数线性方程

$$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=q(x),$$

若已知 $\lambda=\lambda_1$ 为其特征方程

$$\lambda^2+p_1(x)\lambda+p_2(x)=0$$

的常数解,则可作函数变换 $y=e^{\lambda_1x}u$,代入原方程,得

$$u''+(p_1+2\lambda_1)u'+(\lambda_1^2+p_1\lambda_1+p_2)u=qe^{-\lambda_1x},$$

若 λ_1 为特征方程的一重解,则原方程化为

$$u''+(p_1+2\lambda_1)u'=qe^{-\lambda_1x},$$

若 λ_1 为特征方程的二重解,则原方程化为 $u''=qe^{-\lambda_1x}$,这两种情况都可以通过引入新的变量变换实现降阶从而得其通解,代回原变量即可得原方程通解.

例 4-26 求解方程 $x(1-x\ln x)y''+(1+x^2\ln x)y'-(x+1)y=(1-x\ln x)^2e^x$.

解 相应特征方程为

$$x(1-x\ln x)\lambda^2+(1+x^2\ln x)\lambda-(x+1)=0,$$

可求其有一重常数解 $\lambda=1$.

作变换 $y=e^{x}u(x)$，代入原方程得

$$x(1-x\ln x)u''+(2x+1-x^{2}\ln x)u'=(1-x\ln x)^{2},$$

令 $u'=v$，得一阶线性微分方程

$$x(1-x\ln x)v'+(2x+1-x^{2}\ln x)v=(1-x\ln x)^{2},$$

求其通解为

$$u'=v=(c_{1}e^{-x}+1)\frac{1-x\ln x}{x},$$

积分，得

$$u=c_{1}e^{-x}\ln x+x-x\ln x+c_{2}.$$

§4.6 参数的方法

参数解法是常微分方程中重要而常用的方法之一.究其实质，参数解法是一种变量变换的方法，即在常微分方程中引入一个或几个新的变量，并用该变量表示方程中的未知函数，表达式即为方程的参数解，新变量即称参变量.参数解法往往能解决一些基本方法不能解决的问题.

例 4-27 求解方程 $x^{3}+y'^{3}-3xy'=0$.

解 令 $y'=p=tx$，代入方程，得 $x=\frac{3t}{1+t^{3}}$，所以 $p=\frac{3t^{2}}{1+t^{3}}$，从而 $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{9(1-2t^{3})t^{2}}{(1+t^{3})^{3}}$，积分得 $y=\frac{3(1+4t^{3})}{2(1+t^{3})^{2}}+c$，

所以原方程通解为

$$\begin{cases}x=\frac{3t}{1+t^{3}},\\ y=\frac{3(1+4t^{3})}{2(1+t^{3})^{2}}+c,(c\in R).\end{cases}$$

例 4-28 求解方程 $(y')^{3}-y^{2}(a-y')=0$.

解 原方程的参数表示形式为 $\begin{cases}y=\frac{at^{3}}{1+t^{2}},\\ y'=\frac{at^{2}}{1+t^{2}},\end{cases}$

由 $dy=y'dx$，得 $dx=\frac{3+t^{2}}{1+t^{2}}dt$，积分，得 $x=2\arctan t+t+c$，

所以原方程通解为

$$\begin{cases}x=2\arctan t+t+c(c\in R),\\ y=\frac{at^{3}}{1+t^{2}}.\end{cases}$$

例 4-29 求解方程 $y=\ln\sqrt{1+y'^{2}}$.

解 令 $y'=\tan t$，则 $y=\ln\sec t$，所以 $dx=\frac{dy}{y'}=dt$，积分，得 $x=t+c$.所以原方程通解为

$$\begin{cases}x=t+c(c\in R),\\ y=\ln\sec t.\end{cases}$$

对某些含有因式 $x^{2}+y^{2}$ 的方程，可利用极坐标变换 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，从而引入参变量 r 和 θ，以达到化简方程的目的.

例 4-30 求解方程 $(x^{2}+y^{2})y''=2(1+y'^{2})(xy'-y)$.

解 令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，则原方程化为 $r''+r=0$，易求其通解为 $r=c_{1}\cos\theta+c_{2}\sin\theta$.又因为

$$\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}},\sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}},r=\sqrt{x^{2}+y^{2}},$$

所以原方程通解为

$$\sqrt{x^{2}+y^{2}}=c_{1}\frac{x}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}+c_{2}\frac{y}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}},$$

整理，得

$$x^{2}+y^{2}-c_{1}x-c_{2}y=0(c_{1},c_{2}\in R).$$

对某些含有多项式 $p(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$ 的幂的高阶常微分方程，可引入参变量 $u=p(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$.

例 4-31 求解方程 $x^3y''=(y-xy')^2$.

解 令 $u=y-xy'$，代入方程，得 $-x^2u'=u^2$，该方程为关于 u 的变量分离方程，易求其解为 $u=-\dfrac{1}{c+\dfrac{1}{x}}$，即

$$y-xy'=-\frac{1}{c+\dfrac{1}{x}},$$

该方程为关于 y 的一阶非齐次线性方程，求其解为

$$y=x\left(c_2+\ln\left|\frac{x}{1+c_1x}\right|\right).$$

§4.7 升阶的方法

升阶法是常微分方程中很少提到的一种方法，这是因为随着阶数的升高，一般会使得求解更为繁琐，但适当运用这种方法，在有些情况下也可以受到事半功倍的效果. 升阶法往往用于求常系数非齐次线性微分方程的特解，具体分析见参考文献[19].

例 4-32 用升阶法求方程 $x''-2x'-3x=-3t+1$ 的一个特解.

解 两边同时逐次求导，直至右端为常数，得

$$x'''-2x''-3x'=-3,$$

令 $x'=1$，则 $x''=x'''=0$，代回原方程，得 $-2-3x=-3t+1$，解之，有 $x=t-1$，该表达式即为方程的一个特解.

例 4-33 用升阶法求方程 $x''-3x'+2x=te^{2t}$ 的一个特解.

解 令 $x=u(t)e^{2t}$，代回原方程，得

$(u''+4u'+4u)-3(u'+2u)+2u=t$，即 $u''+u'=t$，

两边求导，得 $u'''+u''=1$，令 $u''=1$，则 $u'''=0$，代入方程，得

$$u'=t-1\Rightarrow u=\frac{1}{2}t^2-t,$$

所以可得原方程的一个特解

$$x=\left(\frac{1}{2}t^2-t\right)e^{2t}.$$

例 4-34 用升阶法求方程 $x''-2x'+5x=e^t\sin 2t$ 的一个特解.

解 先求解方程 $y''-2y'+5y=e^{(1+2i)t}$，

令 $y=u(t)e^{(1+2i)t}$，代入方程，得 $u''+4iu'=1$，

取 $u'=\dfrac{1}{4i}=-\dfrac{1}{4}i$，进一步取 $u=-\dfrac{1}{4}it$，则

$$y=-\frac{1}{4}ite^{(1+2i)t}=-\frac{1}{4}ite^t(\cos 2t+i\sin 2t)$$

$$=\frac{1}{4}te^t\sin 2t-\frac{1}{4}ite^t\cos 2t,$$

其虚部函数为原方程的一个特解，即可求得原方程的一个特解为

$$x=-\frac{1}{4}te^t\cos 2t.$$

从以上几个例子可以看出，利用升阶的方法求常系数非齐次线性微分方程的特解，较之于比较系数法，对某些题目而言，避免了繁琐的计算，可以说，升阶法对于求解这类方程提供了一个新的思路.

§4.8 降阶的方法

处理一般高阶微分方程的基本原则是降阶，即利用适当的变换把高阶微分方程的求解问题转化为较低阶方程的求解问题.

例 4-35 求方程 $\dfrac{d^5x}{dt^5}-\dfrac{1}{t}\dfrac{d^4x}{dt^4}=0$ 的通解.

解 令$\frac{d^4x}{dt^4}=u$，则五阶方程转化为一阶方程$\frac{du}{dt}-\frac{1}{t}u=0$，积分，得其通解$u=ct$，即$\frac{d^4x}{dt^4}=ct$. 积分四次，得原方程通解

$$x=c_1t^5+c_2t^3+c_3t^2+c_4t+c_5(c_i\in R).$$

例 4-36 求方程$xx''+(x')^2=0$的通解.

解 令$x'=y$，则$x''=y\frac{dy}{dx}$，从而原二阶方程化为一阶方程

$$xy\frac{dy}{dx}+y^2=0,$$

易求其通解为$y=\frac{c}{x}$，即$x'=\frac{c}{x}$，

积分，得原方程的通解

$$x^2=c_1t+c_2(c_i\in R).$$

例 4-37 已知$x=x_1(t)\neq 0$是二阶齐次线性微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)\frac{dx}{dt}+q(t)x=0$$

的一个特解，试求该方程通解.

解 作变换$x=x_1\int y dt$，则原方程化为一阶线性微分方程

$$x_1\frac{dy}{dt}+[2x_1'+p(t)x_1]y=0,$$

求解，得

$$y=c_1\frac{1}{x_1^2}e^{-\int p(t)dt},$$

所以原方程通解为

$$x=x_1[c_2+c_1\int\frac{1}{x_1^2}e^{-\int p(t)dt}dt].$$

注：该例的另一种解法可参见本章例 4-16. 在待定系数法中，我们利用朗斯基行列式实现了方程的降阶，即得关于另一解$x_2(t)$

的一阶线性微分方程，进一步用常数变易法求解. 在本节中，我们则是通过变量变换实现了降阶. 事实上，这种降阶的方法具有普遍性，详细分析见参考文献[1].

例 4-38 若已知$x=\frac{\sin t}{t}$是方程$x''+\frac{2}{t}x'+x=0$的一个特解，试求该方程的通解.

解 该例可看做例 3 中的取$p(t)=\frac{2}{t}$，取$q(t)=1$，代入上述结论，得方程通解为

$$x(t)=\frac{\sin t}{t}(c_2+c_1\int\frac{t^2}{\sin^2 t}\cdot\frac{1}{t^2}dt)$$

$$=\frac{\sin t}{t}(c_2-c_1\cot t)=\frac{1}{t}(c_2\sin t-c_1\cos t)(c_1,c_2\in R).$$